Άσκηση 2η. Παράδοση: Πέμπτη 23/3 στην τάξη

1. **Πεπερασμένο στοιχείο σύνδεσης** $P_1 - P_2$
Στο τρίγωνο αναφοράς T, θεωρούμε τους 4 βαθμούς ελευθερίας Lagrange : $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(0,1)$ και $M_4(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ που αποτελούν το σύνολο Σ και τα πολυώνυμα $P = Q^1(T) = \{ax + by + cxy + d\}$

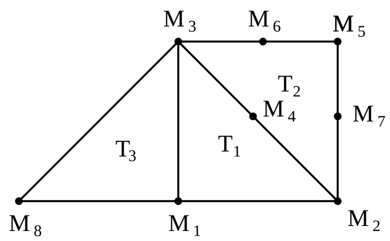
   (α′) Δείξτε ότι (T, Σ, P) είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο Lagrange.

   (β′) Θεωρούμε μια τριγωνοποίηση που αποτελείται από τα παρακάτω τρία στοιχεία (βλ. εικόνα).

(T_1, Σ_1, P_1) : T_1 με κορυφές $M_1,\ M_2,\ M_3$
$\Sigma_1 = \{M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4\}$, όπου M_4 είναι το μέσο της πλευράς M_2M_3.
$P_1 = Q^1(T_1)$

(T_2, Σ_2, P_2) : T_2 με κορυφές $M_2,\ M_5,\ M_3$
$\Sigma_2 = \{M_2,\ M_5,\ M_3,\ M_4,\ M_6,\ M_7\}$, όπου M_6 και M_7 είναι το μέσα των πλευρών M_3M_5 και M_2M_5.
$P_2 = P^2(T_2) = \{ax^2 + by^2 + cx * y + dx + ey + f\}$

(T_3, Σ_3, P_3) : T_3 με κορυφές $M_1,\ M_3,\ M_8$ με $M_8 = (-1, 0)$
$\Sigma_3 = \{M_1,\ M_3,\ M_8\}$
$P_3 = P^1(T_3) = \{ax + by + c\}$



   (γ′) Κατασκευάστε το χώρο V_h που ορίζουν αυτά τα τρία πεπερασμένα στοιχεία. Έστω $\Omega = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Έχουμε $V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$? (ελέγξτε τη συνέχεια στις πλευρές ...) $V_h \subset H^1(\Omega)$?

   (δ′) Ποιάς τάξης θα είναι η προσέγγιση ενός προβλήματος Dirichlet με αυτή την τριγωνοποίηση ?

2. **Q2-serendip finite element** On the unit square C of $\mathbb{R}^2$, we consider the degrees of freedom Σ consisting of the following points:

$$M_1(0,0), M_2(1,0), M_3(1,1), M_4(0,1), M_5(\frac{1}{2},0), M_6(1,\frac{1}{2}), M_7(\frac{1}{2},1), M_8(0,\frac{1}{2}).$$

And let M_9 be the point with coordinates $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(α′) Show that every polynomial of degree 2 satisfies,

$$4p(M_9) + \sum_{i=1}^{4} p(M_i) - 2\sum_{i=5}^{8} p(M_i) = 0,\ \forall p \in P^2(C) \tag{1}$$

(Use Taylor 2nd order)

(β′) We denote $(\tau_i)_{i=1,9}$ the usual basis functions of the Q_2 finite element and we indtroduce the functions

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_i &= \tau_i - \tfrac{1}{4}\tau_9, \quad i = 1, \ldots, 4 \\ \widetilde{\tau}_i &= \tau_i + \tfrac{1}{2}\tau_9, \quad i = 5, \ldots, 8 \end{aligned}$$

Verify that $\widetilde{\tau}_i(M_j) = \delta_{ij}$ and that they satisfy (1).

(γ′) We introduce $P = \{p \in Q^2(C) s.t.p \text{ satisfies } (1)\}$. Conclude from the previous points that the finite element Q_2-serendip= (C, Σ, P) is a Lagrange finite element of second order.

(δ′) Consider a mesh composed by $n \times n$ square elements. Estimate the number of non zero terms of the rigidity matrix for the standard Q_2 elements and the Q_2-serendip finite element.