Άσκηση 1η. Παράδοση: Πέμπτη 8/3 στην τάξη

1. **Examples of H^1 functions.**
We denote χ_Ω the characteristic function of the open set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

(α′) Do the functions $u(x)$ and $v(x)$ belong in $H^1(]0,2[)$?

$$u(x) = \chi_{]0,1[}(x) + (2-x)\chi_{]1,2[}(x),\ v(x) = a\chi_{]0,1[}(x) + b\chi_{]1,2[}(x),$$

(β′) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s.t. $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ with Ω_1, Ω_2 two disjoint open sets. We denote $\Gamma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ and consider a function $u \in C^0(\overline{\Omega})$ s.t.

$$u = u_1\chi_{\Omega_1} + u_2\chi_{\Omega_2}$$

with $u_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)$, for $i = 1,2$. Compute ∇u in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Does the function u belong in $H^1(\Omega)$?

(γ′) Let $R < 1$ and $B_R \subset \mathbb{R}^2$ the disk of center 0 and radius R. Show that the function

$$u(x,y) = \left|\log\sqrt{x^2+y^2}\right|^k$$

belongs in $L^2(B_R)$ for all $k \in \mathbb{R}$. For which values of k does u belong in $H^1(B_R)$? Conclude that a function of $H^1(\Omega)$ with $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is not in general continuous.

2. **Η εξίσωση Laplace με μεταβλητούς συντελεστές**
Έστω Ω ένα ανοικτό, κύρτο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με σύνορο Γ ομαλό. Υποθέτουμε ότι το Ω αποτελείται από δύο υποσύνολα Ω_1 και Ω_2 που χωρίζονται από την ομαλή διεπιφάνεια Σ. Έστω $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ δύο σταθερές και $g \in L^2(\Sigma)$. Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα σε μεταβολική μορφή:

$$\begin{cases} \text{Βρείτε u } \in V \text{ τ.ω. :} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Sigma g v d\Sigma, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1}$$

όπου

$$k = \begin{cases} k_1 & x \in \Omega_1, \\ \\ k_2 & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

(α′) Έστω $V = H_0^1(\Omega)$. Δείξτε ότι το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση.

(β′) Θεωρούμε ότι $u|_{\Omega_i} \in H^2(\Omega_i)$ για $i = 1,2$. Γράψτε το προβλημα (1) σε μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων και συνοριακών συνθηκών :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega_i,\ i = 1,2 \\ \\ k_1\dfrac{\partial u}{\partial n} - k_2\dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \Sigma \\ \\ u = 0 & x \in \Gamma \end{cases}$$

(γ′) Έστω $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Θεωρούμε

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ τ.ω. } v\,|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Δείξτε ότι το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση. (Βοήθεια: χρησιμοποιήστε την ανισότητα Poincaré-Friedrichs).

(δ′) Έστω $V = H^1(\Omega)$.Έχει το πρόβλημα (1) μοναδική λύση ?

3. **Το Σύστημα της ελαστικότητας**
Θεωρούμε ένα στερεό ομογενές και ισότροπο που καταλαμβάνει την περιοχή Ω, ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Συμβολίζουμε με $\vec{u}$ το διάνυσμα παραμορφώσεων. Αν το στερεό υπόκειται σε μία δύναμη $\vec{f}$ και είναι στερεωμένο στο σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, τότε (υπό την υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων) το διάνυσμα παραμορφώσεων ικανοποιεί τις γραμμικές εξισώσεις της ελαστικότητας.

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\vec{u}) = f_i, & x \in \Omega \\ \vec{u} = 0, & x \in \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Έστω $f_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$ και σ είναι ο τανυστής τάσης που συνδέεται με τον τανυστή παραμορφώσεων ε από τον νόμο του Hooke :

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda div(\vec{u})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{u}),$$

με λ, μ τους συντελεστές Lamé και

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

(α′) Δείξτε ότι το πρόβλημα (2) γράφεται στην παρακάτω μεταβολική μορφή :

$$\begin{cases} \text{Βρείτε } \vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^3 \text{ τ.ω} \quad : \\ \lambda \displaystyle\int_\Omega div(\vec{u})div(\vec{v})d\Omega + 2\mu \int_\Omega \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})d\Omega = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}d\Omega,\ \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{cases}$$

(β′) Δείξτε ότι $\forall \vec{u} \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$, ισχύει

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}d\Omega$$

και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση δείξτε την πρώτη ανισότητα του Korn :

$$\int_\Omega \sum_{ij} |\varepsilon_{ij}(\vec{u})|^2\, d\Omega \geq \frac{1}{2}\,\|\nabla\vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\,,\ \forall \vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

(γ′) Δείξτε ότι το (2) έχει μοναδική λύση όταν $\lambda \geq 0$ και $\mu > 0$.