1η Εργαστηριακή Άσκηση.

Παράδοση: Θα γράψετε μία αναφορά στην οποία θα υπάρχουν οι απαντήσεις στα ερωτήματα και σχολιασμός των αποτελεσμάτων. Η παράδοση της άσκησης θα γίνει μέχρι την Τετάρτη 28/3. Θα στείλετε με email ένα αρχείο της μορφής ΕΠΩΝΥΜΟ-ΑΜ.tgz στο οποίο θα περιέχεται η αναφορά σε μορφή pdf καθώς και ο κώδικας. Στην αναφορά θα αναγράφονται τα στοιχεία σας: ονοματεπώνυμο, ΑΜ. Η εξέταση της άσκησης θα γίνει στο εργαστήριο την Πέμπτη 29/3.

Θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση με ένα στατικό πρόβλημα σε ετερογενή μέσο. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται σε διάφορες εφαρμογές : είναι π.χ η εξίσωση που περιγράφει την κατανομή της θερμοκρασίας σε ένα υλικό με ετερογενή συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας (στην κατάσταση ισορροπίας). Υποθέτουμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι μία ανοικτή, φραγμένη περιοχή με ομαλό σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$, και υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$k(x) \geq \alpha, \ \ \forall\ x \in \Omega \tag{1}$$

1. Θέλουμε να βρούμε την θερμοκρασία u σε ένα υλικό με θερμική αγωγιμότητα $k(x)$,

$$\begin{cases} -div\,(k(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{στο } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

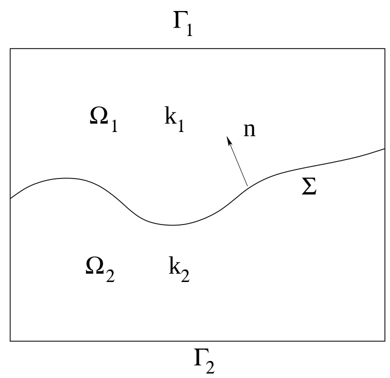
   (α΄) Γράψτε τη μεταβολική μορφή του προβλήματος (2)

$$a(u,v) = L(v) \ \ \forall\ v \in V \tag{3}$$

   (β΄) Δείξτε ότι το προβλημα (3) έχει μοναδική λύση.

2. Θεώρουμε τώρα ότι η περιοχή Ω χωρίζεται σε δύο υποπεριοχές $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, και ότι η θερμική αγωγιμότητα είναι σταθερή σε κάθε περιοχή

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{στην } \Omega_1 \\ k_2 & \text{στην } \Omega_2 \end{cases} \tag{4}$$



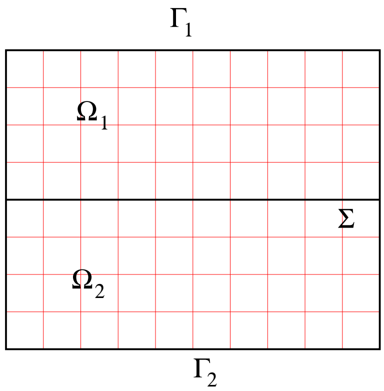
Σχήμα 1: Η περιοχή $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Συμβολίζουμε με Σ το σύνορο μεταξύ Ω_1 και Ω_2, $\Sigma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$, $\Gamma_j = \Gamma \cap \partial\Omega_j$, $j = 1, 2$.

Υποθέτουμε ότι $\Omega = [-1, 1]^2$ και θεωρούμε ότι $\Sigma = [-1, 1] \times \{y = 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ και $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα (3) χρησιμοποιώντας πεπέρασμενα στοιχεία Q^1. Φτιάξτε μια διακριτοποίηση της περιοχής Ω χρησιμοποιώντας τετράγωνα πλευράς h, $\Omega = \cup_{l=1}^{N_{el}} T_l$. Έστω N_{el} ο ολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχείων, $(M_i)_{i=1..N_s}$ τα σημεία της διακριτοποίησης (οι κορυφές των τετραγώνων) όπου N_s είναι ο ολικός αριθμός των σημείων. Έχουμε $N_s = N_i + N_d$, με N_i τα εσωτερικά σημεία (που δεν ανοικούν στο σύνορο $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) και N_d τα σημεία που ανήκουν στο σύνορο Γ με την συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

(α΄) Κατασκευάστε ένα πλέγμα της περιοχής Ω, έτσι ώστε η διεπιφάνεια Σ να συμπίπτει με τις πλευρές των τετραγώνων (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2: Παράδειγμα διακριτοποίησης

Θα πρέπει να ορίσετε :

(ι) N_{el}, N_i, N_d, N_s

(ιι) $coor(m, i)$, η i συντεταγμένη του σημείου m $(1 \le m \le N_s, 1 \le i \le 2)$.

(ιιι) $lg(l, i)$ ο ολικός αριθμός του σημείου i που ανήκει στο l στοιχείο $(1 \le l \le N_{el}, 1 \le i \le 4)$.

(ι) $ref(l)$ ένας δείκτης του στοιχείου l τέτοιος ώστε,

$$ref(l) = \begin{cases} 1 & \text{αν } T_l \subset \Omega_1 \\ 2 & \text{αν } T_l \subset \Omega_2 \end{cases}$$

Έστω V_h,

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}), v_{/T_l} \in Q^1(T_l), \forall T_l, \right\}$$

και $(w_J)_{J=1,N_s}$, οι ολικές συναρτήσης βάσης,

$$w_J(M_I) = \delta_{IJ} \;\; 1 \le I, J \le N_s$$

Η προσεγγιστική λύση του προβλήματος γράφεται σύμφωνα με την μέθοδο της παρεμβολής

$$u_h(x) = \sum_{J=1}^{N_s} u_J w_J(x)$$

(β′) Δείξτε ότι το διακριτό πρόβλημα γράφεται σαν γραμμικό σύστημα :

$$KU = F \tag{5}$$

με $U = (u_J)_{J=1,N_s}$ και $u_J = 0$ εάν M_J ανήκει στο σύνορο Γ. Γράψτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του άκαμπτου πίνακα K και λάβετε υπόψη τη συνθήκη Dirichlet με τη μέθοδο που είπαμε στην τάξη.

Για τον υπολογισμο του δεύτερου μέλους προσεγγίζουμε το f με το f_h,

$$f_h = \Pi_h f = \sum_{J=1}^{N_i} f_J w_J$$

με $f_J = f(M_J)$. Πώς γράφεται τώρα το δεύτερο μέλος ? (συμβολίζουμε με M τον πίνακα μάζας).

(γ′) Γράψτε ένα πρόγραμμα επίλυσης του προσεγγιστικού προβλήματος.

(δ′) Αρχικά τρέξτε το πρόγραμμα για την περίπτωση k =σταθερά. Χρησιμοποιήστε γνωστές ακριβείς λύσεις για να ελέγξετε το πρόγραμμά σας. Για παράδειγμα για $k = 1$ και $f(x, y) = -2\left((x^2 - 1) + (y^2 - 1)\right)$ η ακριβής λύση είναι $u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

(ε′) Γράψτε ένα υποπρόγραμμα που να υπολογίζει το λάθος $u - u_h$ στη νόρμα $L^2(\Omega)$ και $H^1(\Omega)$. Να χρησιμοποιήσετε μία προσεγγιστική μέθοδο για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα,

$$\int_T f(x, y)dxdy = mes(T) \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\omega_k$$

με $M_k(x_k, y_k)$ τα σημεία της αριθμητικής ολοκλήρωσης και ω_k τους αντιστοιχους συντελεστές (π.χ. μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Gauss Lobatto quadrature formula) :

- $M_1(0, 0),\ M_2(1, 0),\ M_3(1, 1),\ M_4(0, 1),$
  $M_5(1/2, 0),\ M_6(1, 1/2),\ M_7(1/2, 1),\ M_8(0, 1/2),\ M_9(1/2, 1/2)$
  και $\omega_i = 1/36,\ i = 1, \dots 4,\ \omega_i = 1/9, i = 5, \dots, 8$ και $\omega_9 = 4/9$.

(ϛ′) Με διαδοχικές διαμερίσεις ($h = 1/10,\ h = 1/20,\ h = 1/30, \dots$) βρείτε την τάξη σύγκλισης της μεθόδου (για το πρόβλημα με $k = 1$ και χρησιμοποιόντας την ακριβής λύση που αναφέρεται στο ερώτημα 2-(δ′)).

(ζ′) Τρέξτε το πρόγραμμα για

$$(k_1, k_2) = (1, 1)\ ,\ (1, 2)\ ,\ (1, 10)\ ,\ (2, 1)\ ,\ (10, 1)$$

και $f(x, y) = -2\left((x^2 - 1) + (y^2 - 1)\right)$