

Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ελαστοδυναμικής και μελέτη της κυματικής διάδοσης στα στερεά : επιμήκη κύματα (P-waves) και εγκάρσια κύματα (S-waves)

Χρυσούλα Τσόγκα
tsogka@tem.uoc.gr

1 Το φυσικό πρόβλημα και εξισώσεις

Ενδιαφερόμαστε για το πρόβλημα μετάδοσης κυμάτων σε ένα στερεό, ετερογενές και ισότροπο σε δύο διαστάσεις. Το διάνυσμα παραμορφώσεων \vec{u} ικανοποιεί τις γραμμικές εξισώσεις της ελαστοδυναμικής :

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\vec{u}) = \vec{f} \quad \text{στην } \Omega \times \mathbf{R} \quad (1)$$

με τις αρχικές συνθήκες :

$$\begin{cases} \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) & \text{στην } \Omega \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, 0) = \vec{u}_1(x) & \text{στην } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

και τις συνοριακές συνθήκες :

$$\begin{cases} \vec{u} = 0 & \text{στο } \Gamma_D \text{ (Dirichlet)} \\ \sigma(\vec{u})\vec{n} = 0 & \text{στο } \Gamma_N \text{ (Neumann)} \\ \sigma(\vec{u})\vec{n} = B \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} & \text{στο } \Gamma_A \text{ (Absorbing)} \end{cases} \quad (3)$$

όπου $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_A = \Gamma$, \vec{n} είναι το κάθετο μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα και ο πίνακας B ορίζεται από :

$$B = - \begin{bmatrix} \sqrt{\mu\rho} & 0 \\ 0 & \sqrt{(\lambda + 2\mu)\rho} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Παρατήρηση 1.1 Η απορροφητική (absorbing) συνοριακή συνθήκη θα χρησιμοποιηθεί μόνο σε σύνορο παράλληλο με τον άξονα x .

Στην (1), σ είναι ο ταυνοστής τάσης που συνδέεται με τον ταυνοστή παραμορφώσεων $\varepsilon(\vec{u})$

$$\varepsilon(\vec{u})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

με τον νόμο του Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{div}(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij} = \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

όπου $\lambda(\mathbf{x})$ και $\mu(\mathbf{x})$ είναι οι συντελεστές Lamé που χαρακτηρίζουν το στερεό υλικό.

E 1.1 Στην περίπτωση που το υλικό είναι ομογενές (δηλαδή $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda$, $\mu(\mathbf{x}) = \mu$, $\rho(\mathbf{x}) = \rho$) δείξτε ότι το σύστημα (1) μπορεί να γραφτεί ως :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\mathbf{div} \vec{u}) - \mu \Delta \vec{u} = \vec{f} \quad \text{στην } \Omega \times R \quad (6)$$

ή αλλιώς θέτοντας $\vec{u} = (u, v)$:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = f_1 \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f_2 \end{cases} \quad (7)$$

Ενέργεια

Ορίζουμε την ενέργεια του συστήματος ως το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας :

$$E(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \sigma(\vec{u}) \varepsilon(\vec{u}) \right) dx \quad (8)$$

E 1.2 Δείξτε ότι αν $\Omega = R^2$ και $f_1 = f_2 = 0$ τότε η ενέργεια διατηρείται $\frac{d(E(t))}{dt} = 0$.

Έστω $H = (L^2(\Omega))^2$ και

$$V = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2; \vec{v} = 0 \text{ στο } \Gamma_D \}$$

E 1.3 Δείξτε ότι η μεταβολική μορφή του προβλήματος (1), (2) (3) γράφεται :
Βρείτε $\vec{u}(x, t)$ τ.ω $\vec{u}(t) \in V$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} dx + \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \varepsilon(\vec{v}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_A} B \vec{u} \cdot \vec{v} d\gamma = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx \quad (9)$$

για κάθε $\vec{v} \in V$.

Θα δεχτούμε ότι ψάχνουμε την λύση στο χώρο $L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H)$.

2 Ανάλυση με επίπεδα κύματα

Θεωρούμε εδώ ότι το υλικό είναι ομογενές. Ορίζουμε ως αρμονικά επίπεδα κύματα τις λύσεις της εξίσωσης (1), με $\vec{f} = \vec{0}$, που γράφονται στην μορφή :

$$\vec{u} = \vec{d} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})) \quad (10)$$

όπου

- \vec{k} είναι το διάνυσμα κύματος (αντιστοιχεί στην διεύθυνση μετάδοσης του κύματος).
- ω είναι η κυκλική συχνότητα
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$ είναι η συχνότητα
- \vec{d} είναι η διεύθυνση ταλάντωσης.

Ε 2.1 Δείξτε ότι για να βρούμε τα αρμονικά επίπεδα κύματα που μεταδίδονται στην κατεύθυνση \vec{k} αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα :

$$\begin{cases} \text{Βρείτε } \vec{d} \neq 0 \text{ και } \omega \text{ τ. } \omega. \\ (\mu |\vec{k}|^2 - \rho\omega^2)\vec{d} + (\lambda + \mu)(\vec{d} \cdot \vec{k}) \vec{k} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

ή αλλιώς,

$$\begin{cases} \text{Βρείτε } \vec{d} \neq 0 \text{ και } \omega \text{ τ. } \omega. \\ \omega^2 \vec{d} = \hat{K} \vec{d} \end{cases} \quad (12)$$

Το πρόβλημα (12) είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Υπολογίστε ω^2 (=τις ιδιοτιμές του πίνακα \hat{K}) και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα \vec{d} . Συμπεράνετε ότι υπάρχουν δύο είδη κυμάτων : τα επιμήκη κύματα (*Primary, P-waves*) που αντιστοιχούν στην πιο μεγάλη ιδιοτιμή, και των οποίων η κατεύθυνση ταλάντωσης είναι παράλληλη στην κατεύθυνση διάδοσης ($\vec{d} \parallel \vec{k}$) και τα εγκάρσια κύματα (*Shear, S-waves*) των οποίων η κατεύθυνση ταλάντωσης είναι κάθετη στην κατεύθυνση διάδοσης ($\vec{d} \perp \vec{k}$). Γράψτε τις αντίστοιχες σχέσεις διασποράς (τις σχέσεις που συνδέουν $|\vec{k}|$ και ω). Βρείτε τις ταχύτητες μετάδοσης των κυμάτων (λέγονται και ταχύτητες φάσης) που ορίζονται από :

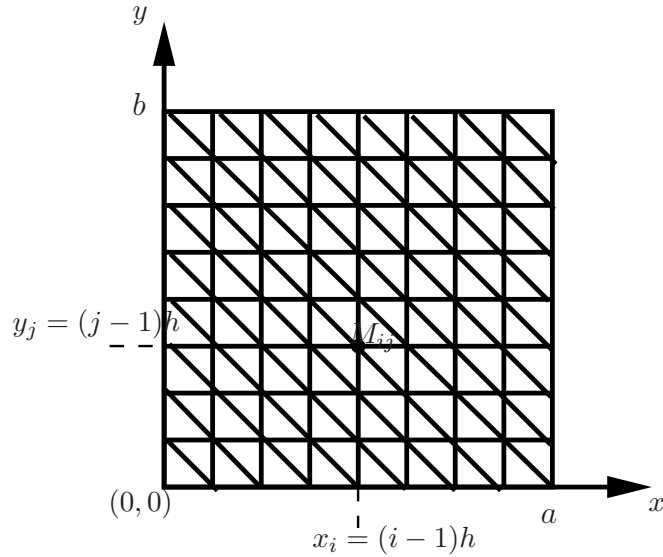
$$V = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

Παρατηρήστε ότι και οι δύο ταχύτητες είναι ανεξάρτητες από τη συχνότητα (γι' αυτό λέμε ότι οι ελαστοδυναμικές εξισώσεις δεν έχουν διασπορά) και την κατεύθυνση (για ισότροπα μέσα μεταφοράς).

3 Προσέγγιση

3.1 Ημί-διακριτοποίηση στο χώρο

Στην συνέχεια, θεωρούμε ότι η περιοχή Ω είναι ένα τετράγωνο $\Omega = [0, a] \times [0, b]$. Κατασκευάζουμε ένα πλέγμα της Ω με ορθογώνια τρίγωνα όπως στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Παράδειγμα πλέγματος

Συμβολίζουμε με H_h^1 το υποσύνολο πεπερασμένης διάστασης του $H^1(\Omega)$,

$$H_h^1 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{Q_j} \in P^1(Q_j) \forall j\}$$

(w_j) μία βάση του H_h , ορίζεται από :

$$w_J(M_I) = \delta_{IJ} \quad 1 \leq I, J \leq N$$

και V_h το υποσύνολο του V , με διάσταση $N_h = N - N_D \leq N$, όπου N_D είναι ο αριθμός των σημείων που ανοίχουν στο σύνορο Dirichlet :

$$V_h = \{\vec{v} \in (H_h^1)^2; \vec{v} = 0 \text{ στο } \Gamma_D\}$$

Ορίζουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις βάσης,

$$\vec{w}_I^1 = \begin{pmatrix} w_I \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{w}_I^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ w_I \end{pmatrix}$$

Ε 3.1 Γράψτε την προσεγγιστική μεταβολική μορφή του προβλήματος. Η προσεγγιστική λύση $\vec{u}_h = (u_h^1, u_h^2)$ γράφεται σύμφωνα με την μέθοδο της παρεμβολής :

$$u_h^1(x, t) = \sum_{J=1}^{N_h} u_J^1(t) w_J(x)$$

$$u_h^2(x, t) = \sum_{J=1}^{N_h} u_J^2(t) w_J(x)$$

ή

$$\vec{u}_h(x, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{J=1}^{N_h} u_J^\alpha(t) \vec{w}_J^\alpha(x)$$

Δείξτε ότι το πρόβλημα γράφεται στη μορφή,

$$M_h \frac{d^2 U}{dt^2} - B_h^A \frac{dU}{dt} + K_h U = F_h \quad (13)$$

όπου πρέπει να βρείτε τους πίνακες M_h (μάζας), K_h (άκαμπτος) και B_h^A (ο πίνακας που αντιστοιχεί στις απορροφητικές συνθήκες). Το διάνυσμα U ορίζεται από,

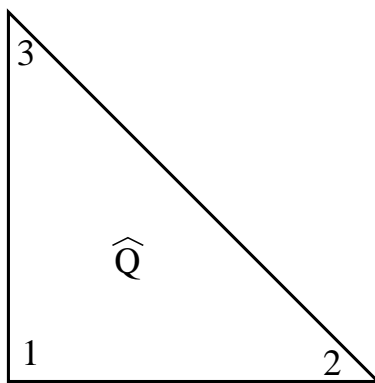
$$U = (u_1^1 \dots u_{N_h}^1 u_1^2 \dots u_{N_h}^2)$$

όπου υποθέσαμε ότι τα σημεία *Dirichlet* αντιστοιχούν στους αριθμούς $N_h + 1$ ως N .

Υπολογισμός των πινάκων αναφοράς

Θεωρούμε το πεπερασμένο στοιχείο αναφοράς \hat{Q} , συμβολίζουμε με M^i , $i = 1, \dots, 3$ τα σημεία του στην τοπική αρίθμηση (βλέπε σχήμα 2) και με $\vec{\tau}_i^k$ τις τοπικές συναρτήσεις βάσης

$$\vec{\tau}_i^1 = \begin{pmatrix} \tau_i \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{\tau}_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_i \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 2: Η τοπική αρίθμηση

Ε 3.2 Υπολογίστε τους πίνακες αναφοράς. Θα κατασκευάσετε τους πίνακες διάστασης 3×3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ij} = \int \tau_i \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 3 ; \\ K_{11ij} = \int \partial_1 \tau_i \partial_1 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 3 ; \\ K_{22ij} = \int \partial_2 \tau_i \partial_2 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 3 ; \\ K_{12ij} = \int \partial_1 \tau_i \partial_2 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 3 ; \\ K_{21ij} = \int \partial_2 \tau_i \partial_1 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 3 ; \end{array} \right. \quad (14)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

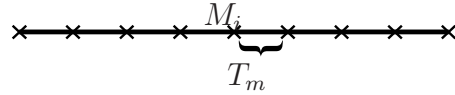
$$\int_Q f dx dy \approx \frac{1}{3} (f_1 + f_2 + f_3) |Q|, \quad (15)$$

όπου f_i είναι η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο M_i και Q είναι το εμβαδόν του τριγώνου Q . Παρατηρήστε ότι ο πίνακας M_h είναι τώρα διαγώνιος.

Ε 3.3 Γράψτε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του άκαμπτου πίνακα.

Ορισμός του πίνακα B_h^A .

Πρόκειται για ένα πίνακα που αφορά μόνο τα σημεία που ανοίχουν στο σύνορο Γ_a . Παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις βάσης ϕ_i πάνω στο σύνορο είναι συναρτήσεις P^1 μίας μεταβλητής.



Σχήμα 3: Παράδειγμα πλέγματος στο σύνορο Γ_a

Θέωρουμε το πεπερασμένο στοιχείο αναφοράς σε μία διάσταση :



Σχήμα 4: Πεπερασμένο στοιχείο αναφοράς σε $1d$

Συμβολίζουμε με M^i , $i = 1, 2$ τα σημεία του στην τοπική αρίθμηση (βλέπε σχήμα 4) και με $\vec{\phi}_i^k$ τις τοπικές συναρτήσεις βάσης,

$$\vec{\phi}_i^1 = \begin{pmatrix} \phi_i \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ \vec{\phi}_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i \end{pmatrix} .$$

Υπολογίστε τους πίνακες

$$\int_I \phi_l^m \phi_k^m d\gamma$$

χρησιμοποιώντας την σχέση :

$$\int_I f = \frac{|I|}{2} (f_1 + f_2) \quad (16)$$

όπου $f_{i=1,2}$ είναι η τιμή της συνάρτησης f στα σημεία M_i , $i = 1, 2$ και $|I|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος I .

Ε 3.4 Γράψτε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του πίνακα B_h^A (είναι διαγώνιος).

3.2 Ολική Διακριτοποίηση

Ε 3.5 Χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές γράψτε την ολική διακριτοποίηση του προβλήματος στην μορφή,

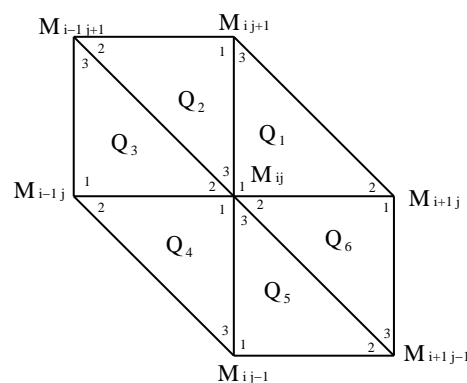
$$M_h \frac{U^{n+1} - 2U_n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + B_h^A \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} + K_h U^n = F_h^n \quad (17)$$

όπου Δt είναι το βήμα διακριτοποίησης στο χρόνο και U^k είναι η λύση στο χρόνο $k\Delta t$.

3.3 Αριθμητική σχέση διασποράς και μελέτη ευστάθειας της μεθόδου

Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες της αριθμητικής μεθόδου, ενδιαφερόμαστε αρχικά για την περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}^2$ το υλικό είναι ομογενές και $\vec{f} = \vec{0}$. Θεωρούμε επίσης ότι $\Delta x = \Delta y = h$.

Ε 3.6 Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του διακριτού προβλήματος γράψτε την εξίσωση στο σημείο M_{ij} , Για ευκολία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρίθμηση του σχήματος 5



Σχήμα 5: Το σημείο M_{ij} και τα γειτονικά του σημεία

$$\rho \frac{\bar{u}_{ij}^{n+1} - 2\bar{u}_{ij}^n + \bar{u}_{ij}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \bar{u}_h^n = 0 \quad (18)$$

όπου

$$\left\{ \begin{aligned} (K_h \bar{u}_h)_1 &= \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ &+ \frac{\mu}{h^2} (2u_{i,j} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}) \\ &+ \frac{(\lambda + \mu)}{h^2} \left(v_{i,j} + \frac{1}{2} (v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1}) \right) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (K_h \bar{u}_h)_2 &= \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \left(u_{i,j} + \frac{1}{2} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}) \right) \\ &+ \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (2v_{i,j} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1}) \\ &+ \frac{\mu}{h^2} (2v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j}) \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Με αυτόν τον τρόπο γράψαμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Q_1 ως μία ισοδύναμη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Για να βρούμε την αριθμητική σχέση διασποράς θεωρούμε λύσεις του προβλήματος της μορφής

$$\bar{u}_h = \vec{d} \exp[i(\omega n \Delta t - ik_x \Delta x - jk_z \Delta z)] \quad (21)$$

Ε 3.7 Δείξτε ότι η σχέση διασποράς γράφεται :

$$\frac{2\rho}{\Delta t^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \vec{d} + \hat{K}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0 \quad (22)$$

(υπολογίστε τον πίνακα \hat{K}_h).

Μπορούμε να δείξουμε ότι μία απαραίτητη συνθήκη για να είναι η μέθοδος ευσταθής είναι να είναι το ω πραγματικός αριθμός (αλλιώς υπάρχουν λύσεις οι οποίες αυξανονται εκθετικά στο χρόνο). Βρείτε μία συνθήκη έτσι ώστε να έχουμε $\omega \in \mathbb{R}$.

Ε 3.8 Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα \hat{K}_h . Συμβολίζουμε με s_P και s_S αυτές τις ιδιοτιμές, με $s_S \leq s_P$.

Ε 3.9 Γράψτε την συνθήκη $\omega \in \mathbb{R}$ ($1 - \cos \omega \Delta t \in [0, 2]$) στην μορφή $f(\beta_1, \beta_2) \in [0, 2]$, $\forall k_1, k_2$ με $\beta_1 = \cos(k_1 \Delta x)$ και $\beta_2 = \cos(k_2 \Delta x)$.

Μελετώντας τις τιμές αυτής της συνάρτησης f στο τετράγωνο $[-1, 1]^2$, καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι έχουμε την συνθήκη CFL,

$$\sqrt{2} V_P \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (23)$$

4 Προγραμματισμός. Αριθμητική μελέτη.

4.1 Αριθμητική μελέτη της διασποράς

Είδαμε ότι για το συνεχές πρόβλημα οι ταχύτητες μετάδοσης είναι $V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ για τα διαμήκη κύματα και $V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ για τα εγκάρσια. Οι αριθμητικές ταχύτητες V_j^{num} , $j = P, S$ υπολογίζονται από,

$$V_j^{num} = \frac{\omega_j^{num}}{|\vec{k}|}$$

όπου $\omega_j^{num}(|\vec{k}|)$ είναι η λύσεις της αριθμητικής σχέσης διασποράς

$$\frac{2\rho}{\Delta t^2}(1 - \cos\omega_j^{num}\Delta t) = s_j(\vec{k}) \quad (24)$$

Για να συγκρίνουμε τις αριθμητικές με τις συνεχείς ταχύτητες, ορίζουμε το πηλίκο

$$q_j(\vec{k}) = \frac{\omega_j^{num}(\vec{k})}{|\vec{k}| V_j} \quad \text{με } j = P \text{ ή } S.$$

Ορίζουμε επίσης,

- το μήκος κύματος : $l = \frac{2\pi}{\omega}$.
- τον αριθμό σημείων ανά μήκος κύματος: $G = \frac{l}{h} = \frac{2\pi}{|\vec{k}| h}$
- και το αντίστροφο του $H = 1/G$.

Ε 4.1 Θεωρούμε μία κατεύθυνση μεταφοράς $\vec{k} = |\vec{k}| (\cos\theta, \sin\theta)$. Αντικαθιστούμε στο s_j :

$$k_1 = 2\pi \frac{H}{h} \cos(\theta), \quad k_2 = 2\pi \frac{H}{h} \sin(\theta), \quad \text{όπου } |\vec{k}| = 2\pi \frac{H}{h}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $h = 1$. Παρατηρήστε ότι τώρα τα s_j εξαρτώνται από το θ και το H . Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει τις αριθμητικές ταχύτητες φάσης. Σχεδιάστε τα πηλικά q_j (για $j = P$ και $j = S$) ως συνάρτηση του H (για $H \in [0., 0.5]$) για διαφορετικές τιμές του $\theta = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ και του $\Delta t = \alpha h = \alpha$ με $\alpha = [0, \alpha_{max}]$, $\alpha_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}V_P}$. Επίσης σχεδιάστε τα q_j ως συνάρτηση του θ για διαφορετικές τιμές των α και H .

4.2 Υπολογιστικές προσομοιώσεις

Για να προσομοιώσουμε μία πηγή στο σημείο (x_s, y_s) , μπορούμε να θεωρήσουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(x, y, t) = \vec{f}(r)g(t) \\ \text{όπου } \vec{f}(r) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 1_{B_a} \vec{e}_{j=P,S} \\ r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad a = 5h \\ \text{με } \vec{e}_P = \left(\frac{x - x_s}{r}, \frac{y - y_s}{r}\right), \quad \vec{e}_S = \left(-\frac{y - y_s}{r}, \frac{x - x_s}{r}\right) \\ \text{με } h = \min(\Delta x, \Delta y) \\ 1_{B_a} \text{ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του δίσκου με κέντρο } (x_s, y_s) \text{ και ακτίνα } a \\ g(t) = \begin{cases} -2(\pi f_0)^2 (t - t_0) \exp(-\pi f_0 (t - t_0))^2 & t \in [0, t_1] \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \\ t_0 = \frac{1}{f_0}, \quad t_1 = \frac{2}{f_0} \end{array} \right. \quad (25)$$

και μηδενικές αρχικές συνθήκες,

$$\begin{cases} u_0(x, y) = 0 \\ u_1(x, y) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα F_h ,

$$\vec{f}_h(x, t) = \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_h} f_j^l \tau_j^l(x)$$

όπου (f_j^1, f_j^2) είναι η τιμή της συνάρτησης $\vec{f}(r)$ στο σημείο M_j και χρησιμοποιούμε την σχέση (15) για τον υπολογισμό του F_h . Έχουμε τότε

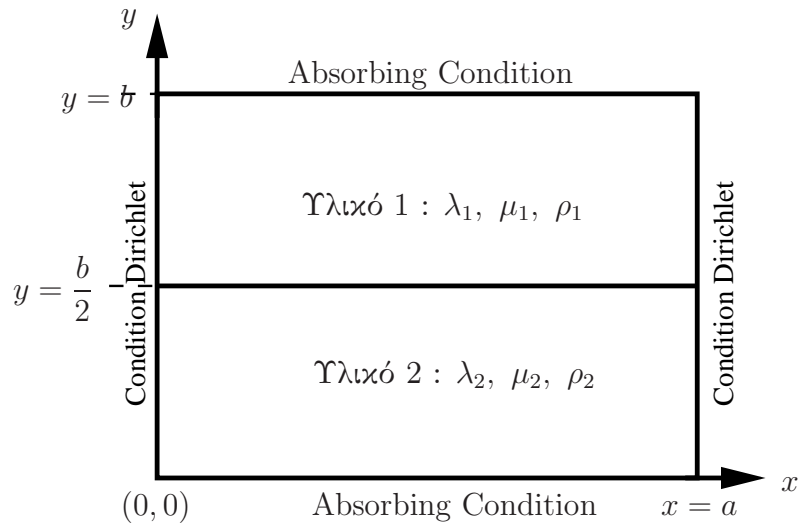
$$F_h = M_h \left[\vec{f} \right]$$

με M_h τον πίνακα μάζας που είναι διαγώνιος, με $\left[\vec{f} \right] = (f_1^1, f_2^1, \dots, f_{N_h}^1, f_1^2, f_2^2, \dots, f_{N_h}^2)$ διάνυσμα που έχει ως συνιστώσες τις τιμές της $\vec{f}(r)$ στα σημεία $M_{i=1, \dots, N_h}$. Άρα έχουμε

$$F_h^n = F_h g(n\Delta t), \quad \Delta t = \alpha h$$

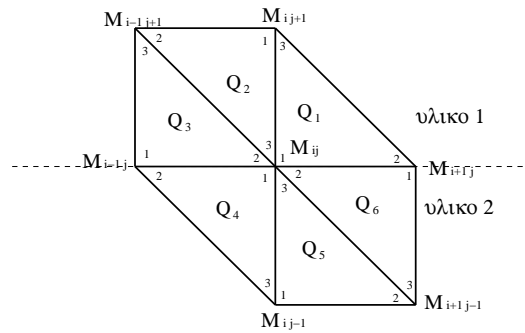
Ετερογενές μέσο μεταφοράς

Θεωρούμε τώρα ένα μέσο μεταφοράς που αποτελείται από δύο υλικά (βλέπε σχήμα 6).



Σχήμα 6: Το ετερογενές μέσο μεταφοράς

Ε 4.2 Για να λάβετε υπόψη την ετερογένεια του υλικού πρέπει να ξέρετε τα σημεία της διεπιφάνειας. Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις στο σημείο M_{ij} στη διεπιφάνεια γράφονται (βλέπε σχήμα 7)



Σχήμα 7: Το σημείο M_{ij} της διεπιφάνειας και τα γειτονικά του σημεία

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1 + \lambda_2 + 2\mu_2}{2h^2} (2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ &+ \frac{\mu_1}{h^2} (u_{i,j} - u_{i,j+1}) + \frac{\mu_2}{h^2} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\lambda_1}{2h^2} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i,j} - v_{i,j+1}) \\ &+ \frac{\lambda_2}{2h^2} (v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j} + v_{i,j} - v_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\mu_1}{2h^2} (v_{i,j} - v_{i-1,j} + v_{i+1,j+1} - v_{i,j+1}) \\ &+ \frac{\mu_2}{2h^2} (v_{i,j} - v_{i+1,j} + v_{i-1,j-1} - v_{i,j-1}) \end{aligned} \right. \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \frac{v_{i,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2h^2} (2v_{i,j} - v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \\ &+ \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{h^2} (v_{i,j} - v_{i,j+1}) + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{h^2} (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\lambda_1}{2h^2} (u_{i,j} - u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}) \\ &+ \frac{\lambda_2}{2h^2} (u_{i,j} - u_{i+1,j} + u_{i-1,j-1} - u_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\mu_1}{2h^2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j} - u_{i,j+1}) \\ &+ \frac{\mu_2}{2h^2} (u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j} + u_{i,j} - u_{i,j-1}) \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Παρατήρηση 1 Προσοχή, για το ετερογενές υλικό πρέπει να ξεκινήσετε από τις εξισώσεις (1), τα συστήματα (6) και (7) είναι ισοδύναμα με το (1) μόνο για ομογενή υλικά.

Γράψτε ένα κώδικα που να λύνει το ετερογενές πρόβλημα με τις συνοριακές συνθήκες που απεικονίζονται στο σχήμα 3. Χρησιμοποιήστε τον κώδικα για τις παρακάτω προσομοιώσεις.

Ε 4.3 Πρώτο παράδειγμα

Επιλύστε το πρόβλημα με τις συνοριακές συνθήκες του σχήματος 6 αλλά για $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$ και $\rho_1 = \rho_2$. Θα κάνετε δύο προσομοιώσεις : μία χρησιμοποιώντας μια πηγή διαμήκων κυμάτων $\vec{e}_j = \vec{e}_P$ και μια με μία πηγή εγκάρσιων κυμάτων $\vec{e}_j = \vec{e}_S$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε $\Delta x = \Delta y = h$.

α/ Σχεδιάστε τη λύση σε διάφορες χρονικές στιγμές. Σχεδιάστε επίσης το $\text{div}(\vec{u}) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$ και $\text{rot}(\vec{u}) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$, για να διαχωρίσετε τα κύματα P από τα S . Παρατηρήστε ότι για την πρώτη προσομοίωση έχουμε $\text{rot}(\vec{u}) \simeq 0$ ενώ για τη δεύτερη $\text{div}(\vec{u}) \simeq 0$.

β/ Διαλέξτε μερικά σημεία στην περιοχή Ω και σχεδιάστε την λύση ως συνάρτηση του χρόνου σε αυτά τα σημεία.

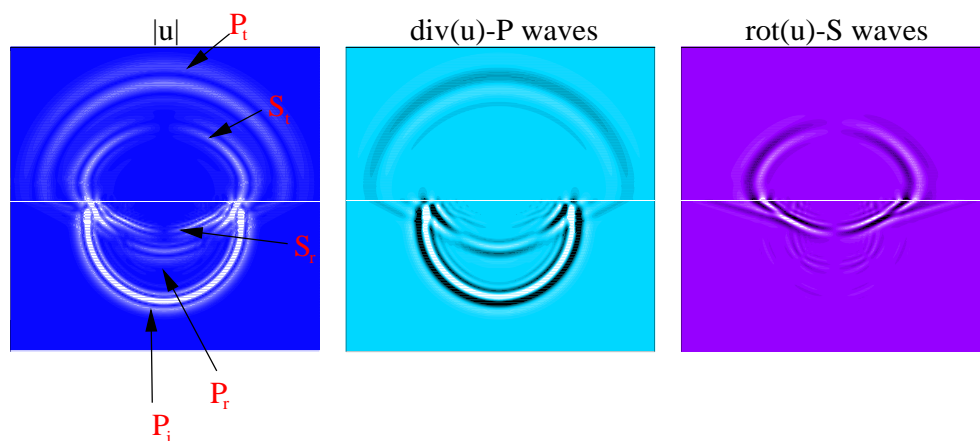
γ/ Τρέξτε τον κώδικα για διαφορετικές τιμές του $\gamma = \sqrt{2V_P^2} \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Παρατηρείτε αστάθειες από κάποια τιμή του γ και πάνω; Αντιστοιχεί αυτή η τιμή στη θεωρητική τιμή CFL;

δ/ Παρατηρήστε την αριθμητική ανισοτροπία στα αποτελέσματα, όταν το $h \rightarrow 0$ πρέπει το κύμα να μεταδίδεται σε μορφή κύκλων.

ε/ Τι συμβαίνει όταν τα κύματα φτάνουν σε ένα σύνορο Dirichlet; Τι συμβαίνει όταν τα κύματα φτάνουν σε ένα absorbing σύνορο;

Ε 4.4 Θεωρείστε τώρα ένα μέσο μεταφοράς που αποτελείται από δύο υλικά θα κάνετε δύο προσομοιώσεις. Στην πρώτη μία πηγή κυμάτων P είναι στο υλικό 1 και στην δεύτερη στο υλικό 2 (σχετικά κοντά στη δι-επιφάνεια).

Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις όταν το κύμα P_i (που ξεκίνησε από την πηγή στο υλικό i) φτάνει στη διεπιφάνεια τότε έχουμε : ανάκλαση στο υλικό i δύο κυμάτων ενός P και ενός S και μετάδοση στο υλικό j δύο κυμάτων ενός P και ενός S .



Σχήμα 8: Παράδειγμα αποτελεσμάτων

Παρατήρηση 4.1 Για να βρούμε μια καλή προσέγγιση της λύσης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πλέγμα με αρκετά σημεία ανά μήκος κύματος S (που είναι το μικρότερο)

$$G = \frac{V_S}{f_0 h}$$

Στην πράξη, να θεωρήσετε $G = 5, 10, 15$ και 20 και να μελετήσετε την επιρροή του στην ποιότητα των αποτελεσμάτων. Αυτές τις τιμές να χρησιμοποιήσετε στο ερώτημα 4.3δ/.

Παρατήρηση 4.2 Μπορείτε να βρείτε τιμές για τα λ , μ και ρ στο internet. Για παράδειγμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις παρακάτω τιμές για το υπέδαφος $\rho = 3gr/cm^3$, $V_P = 3km/s$,

$V_S = 1.5 \text{ km/s}$ και $f_0 = 1 \text{ kHz}$. *Η τις παρακάτω τιμές για το ατσάλι $\lambda = 1.091 \times 10^{11} \text{ Pascal}$, $\mu = 0.821 \times 10^{11} \text{ Pascal}$ και $\rho = 7840 \text{ Kgr/m}^3$ και μία πηγή με συχνότητα $f_0 = 1 \text{ kHz}$. Στην πράξη για να μην χρησιμοποιήτε τόσο μεγάλους αριθμούς μπορείτε να κάνετε τους υπολογισμούς με $\tilde{\lambda} = \lambda \times 10^{-9}$, $\tilde{\mu} = \mu \times 10^{-9}$, και $\tilde{\rho} = \rho \times 10^{-3}$ και μπορείτε να θεωρήσετε $\tilde{f}_0 = 10^{-3} \times f_0$. Σε αυτήν την περίπτωση ο χώρος μετρείται σε m και ο χρόνος σε $msec$.*

Παρατήρηση 4.3 Χρησιμοποιήστε για τις παραπάνω προσομοιώσεις $\lambda_1 = \lambda_2/4$, $\mu_1 = \mu_2/4$, $\rho_1 = \rho_2$.

Ε 4.5 Χρησιμοποιήστε επίσης $\lambda_1 = \lambda_2/2$, $\mu_1 = \mu_2/2$, $\rho_1 = \rho_2/2$. Τι παρατηρείτε;