Άσκηση 3η. Παράδοση : Δευτέρα 11/6 στην τάξη

1. Υπολογίστε την κλασική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

για

(α′) $f(u) = au$ ($a > 0$ σταθερά),

(β′) $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ και

(γ′) $f(u) = \dfrac{u^4}{4}$.

Για κάθε περίπτωση να σχεδιάσετε τις χαρακτηριστικές στο πλανο (x,t) και την λύση ως συνάρτηση του x για διάφορες τιμές του χρόνου t.

2. Θεωρούμε την εξίσωση Bürgers

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{u^2}{2}) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{a} & \text{αν } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{αν } x \geq a \end{cases} \end{cases}$$

με $a > 0$.

(α′) Κατασκευάστε την λύση με την μέθοδο των χαρακτηριστικών.

(β′) Είναι η λύση που κατασκευάσατε κλασική ?

(γ′) Τι γίνεται στο όριο $a \to 0$?

3. Θεωρούμε την εξίσωση Bürgers με αρχική τιμή : $u_0(x) = sinx$

(α′) Δείξτε ότι οι χαρακτηριστικές δεν τέμνονται πριν απο το χρόνο $t = 1$.

(β′) Υπολογίστε το σημείο t_ϵ στο οποίο τέμνονται οι χαρακτηριστικές που ξεκινάνε απο τα σημεία $\pi - \epsilon$ και $\pi + \epsilon$.

(γ′) Εξηγήστε γιατι δεν μπορεί να υπάρξει κλασική λύση πέρα απο τον χρόνο $t = 1$.

4. Θεωρούμε την κυματική εξίσωση (σε μια διάσταση):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

(α′) Γράψτε το πρόβλημα (1) ως σύστημα πρώτου βαθμού:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \mathbb{C} \dfrac{\partial U}{\partial x}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

με $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ και όπου $\mathbb{C}$ είναι ένας πίνακας 2×2.

(β′) Με διαγωνιοποίηση του $\mathbb{C}$, γράψτε το (2) σαν ένα σύστημα δύο ανεξάρτητων βαθμωτών νόμων διατήρησης (χρησιμοποιόντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών).

(γ′) Βρείτε την λύση του (1) (σε αναλυτική μορφή, ως συνάρτηση των αρχικών δεδομένων του προβλήματος u_0, v_0).

(δ′) Αν μεταβληθεί το u_0 ή το v_0 στο διάστημα $[a, b]$, που θα μεταβληθεί η λύση u?

(ε′) Αν θέλουμε να αλλάξουμε την λύση στο (x, t) που πρέπει να αλλάξουμε τα u_0, v_0?

5. Θεωρούμε το πρόβλημα Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

(α′) Για κάθε περίπτωση $u_l < u_r$ και $u_l > u_r$, κατασκευάστε διάφορες (πάνω απο μία) ασθενείς λύσεις του (3).

(β′) Σε ποια περίπτωση (για ποιες τιμές των u_l, u_r) υπάρχει στατική λύση ?

6. Θεωρούμε το πρόβλημα Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x \leq 0 \\ u_2, & 0 < x \leq 1 \\ u_3, & x > 1 \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

(α′) Υπο ποια συνθήκη υπάρχει συνεχής λύση του (4) ?

(β′) Υπολογίστε τη λύση για $u_1 = 0, u_2 = 1$ και $u_3 = 0$. Δείξτε ότι το άλμα της λύσης $(u^+ - u^-)$ τείνει στο 0 όταν $t \to +\infty$.

(γ′) Υπολογίστε τη λύση για $u_1 = 2, u_2 = 1$ και $u_3 = 0$. (Σε όλες τις παραπανω περιπτώσεις να σχεδιάσετε τις χαρακτηριστικές στο πλανο (x, t) και την λύση ως συνάρτηση του x για διάφορες τιμές του χρόνου t.)