Άσκηση 2η. Παράδοση: Δευτέρα 23/4 στην τάξη

1. **Πεπερασμένο στοιχείο σύνδεσης** $P_1 - P_2$
   Στο τρίγωνο αναφοράς T, θεωρούμε τους 4 βαθμούς ελευθερίας Lagrange : $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(0,1)$ και $M_4(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ που αποτελούν το σύνολο Σ και τα πολυώνυμα $P = Q^1(T) = \{ax + by + cxy + d\}$

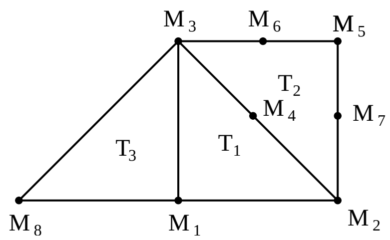
   (α′) Δείξτε ότι (T, Σ, P) είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο Lagrange.

   (β′) Θεωρούμε μια τριγωνοποίηση που αποτελείται από τα παρακάτω τρία στοιχεία (βλ. εικόνα).

(T_1, Σ_1, P_1) : T_1 με κορυφές $M_1,\ M_2,\ M_3$
$\Sigma_1 = \{M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4\}$, όπου M_4 είναι το μέσο της πλευράς M_2M_3.
$P_1 = Q^1(T)$

(T_2, Σ_2, P_2) : T_2 με κορυφές $M_2,\ M_5,\ M_3$
$\Sigma_2 = \{M_2,\ M_5,\ M_3,\ M_4,\ M_6,\ M_7\}$, όπου M_6 και M_7 είναι το μέσα των πλευρών M_3M_5 και M_2M_5.
$P_2 = P^2(T) = \{ax^2 + by^2 + cx * y + dx + ey + f\}$

(T_3, Σ_3, P_3) : T_3 με κορυφές $M_1,\ M_3,\ M_8$
$\Sigma_3 = \{M_1,\ M_3,\ M_8\}$
$P_3 = P^1(T) = \{ax + by + c\}$



   (γ′) Κατασκευάστε το χώρο V_h που ορίζουν αυτά τα τρία πεπερασμένα στοιχεία. Έστω $\Omega = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Έχουμε $V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$? (ελέγξτε τη συνέχεια στις πλευρές ...) $V_h \subset H^1(\Omega)$?

   (δ′) Ποιάς τάξης θα είναι η προσέγγιση ενός προβλήματος Dirichlet με αυτή την τριγωνοποίηση ?