Άσκηση 1η. Παράδοση: Δευτέρα 16/4 στην τάξη

1. **Η εξίσωση Laplace με μεταβλητούς συντελεστές**
Έστω Ω ένα ανοικτό, κύρτο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με σύνορο Γ ομαλό. Υποθέτουμε ότι το Ω αποτελείται από δύο υποσύνολα Ω_1 και Ω_2 που χωρίζονται από την ομαλή διεπιφάνεια Σ. Έστω $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ δύο σταθερές και $g \in L^2(\Sigma)$. Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα σε μεταβολική μορφή:

$$\begin{cases} \text{Βρείτε u } \in V \text{ τ.ω. :} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega k\nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Sigma g v d\Sigma, \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1}$$

όπου

$$k = \begin{cases} k_1 & x \in \Omega_1, \\ k_2 & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

(α′) Έστω $V = H_0^1(\Omega)$. Δείξτε ότι το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση.

(β′) Θεωρούμε ότι $u \in H^2(\Omega_i)$ για $i = 1, 2$. Γράψτε το προβλημα (1) σε μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων και συνοριακών συνθηκών :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega_i,\ i = 1, 2 \\ \\ k_1 \dfrac{\partial u}{\partial n} - k_2 \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \Sigma \end{cases}$$

(γ′) Έστω $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Θεωρούμε

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ τ.ω. } v\,|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Δείξτε ότι το πρόβλημα (1) έχει μοναδική λύση. (Βοήθεια: χρησιμοποιήστε την ανισότητα Poincaré-Friedrichs).

(δ′) Έστω $V = H^1(\Omega)$.Έχει το πρόβλημα (1) μοναδική λύση ?

2. **Το Σύστημα της ελαστικότητας**
Θεωρούμε ένα στερεό ομογενές και ισότροπο που καταλαμβάνει την περιοχή Ω, ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Συμβολίζουμε με $\vec{u}$ το διάνυσμα παραμορφώσεων. Αν το στερεό υπόκειται σε μία δύναμη $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^3$ και είναι στερεωμένο στο σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, τότε (υπό την υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων) το διάνυσμα παραμορφώσεων ικανοποιεί τις γραμμικές εξισώσεις της ελαστικότητας.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) = f_i, & x \in \Omega \\ \vec{u} = 0, & x \in \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Όπου σ είναι ο τανυστής τάσης που συνδέεται με τον τανυστή παραμορφώσεων ε από τον νόμο του Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda div(\vec{u})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{u}),$$

με λ, μ τους συντελεστές Lamé και

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

(α′) Δείξτε ότι το πρόβλημα (2) γράφεται στην παρακάτω μεταβολική μορφή :

$$\begin{cases} \text{Βρείτε } \vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^3 \text{ τ.ω} \quad : \\ \lambda \displaystyle\int_\Omega div(\vec{u})div(\vec{v})d\Omega + 2\mu \int_\Omega \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})d\Omega = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}d\Omega, \ \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{cases}$$

(β′) Δείξτε ότι $\forall \vec{u} \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$, ισχύει

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}d\Omega$$

και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση δείξτε την πρώτη ανισότητα του Korn :

$$\int_\Omega \sum_{ij} |\varepsilon_{ij}(\vec{u})| \, d\Omega \geq \frac{1}{2} \|\nabla \vec{u}\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall \vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

(γ′) Δείξτε ότι το (2) έχει μοναδική λύση όταν $\lambda \geq 0$ και $\mu > 0$.