

## 1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα matlab, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα  $\rho$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$  με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους  $x_n$  της ακολουθίας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου  $x_0$  δεδομένη αρχική προσέγγιση της  $\rho$ . Οι συναρτήσεις  $f$  και  $f'$  θα πρέπει να υπολογίζονται είτε inline ή ως functions. Ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται η αρχική προσέγγιση  $x_0$ , και οι παράμετροι  $TOL > 0$  και  $NMAX$  (φυσικός). Ως κριτήριο τερματισμού θα χρησιμοποιείται το εξής: Αν  $|x_{n+1} - x_n| \leq TOL$  για πρώτη φορά, τότε θεωρήσε το  $x_{n+1}$  ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ  $NMAX$  επαναλήψεις.

Σε κάθε βήμα  $n$ , το πρόγραμμά σας θα πρέπει να εκτυπώνει τις τιμές των  $n$ ,  $x_n$ ,  $f(x_n)$  και  $|x_{n+1} - x_n|$ . Αν το πρόγραμμα κάνει  $NMAX$  επαναλήψεις χωρίς να βρει την ρίζα με ακρίβεια  $TOL$ , τότε πρέπει το πρόγραμμα να εμφανίζει το μήνυμα M1: «Could converge after  $NMAX$  iterations». Το προγράμμά σας πρέπει να ελέγχει ότι  $f'(x_n) \neq 0$ , στην αντίθετη περίπτωση πρέπει να σταματάει και να τυπώνει το μήνυμα M2: «Newton's method is not well defined at  $x_n$ ».

2. Αποδείξτε αναλυτικά (δηλ. με μελέτη συναρτησης) ότι η εξίσωση  $f(x) := 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0$  έχει τρεις πραγματικές ρίζες  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  και  $\rho_3$  και σχεδιάστε με την βοήθεια του matlab την γραφική παράσταση της  $f(x)$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1 (που υλοποιεί τη μέθοδο του Νεύτωνα), με παραμέτρους  $x_0$ ,  $TOL$  και  $NMAX$  της επιλογής σας, για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ριζών. (Οι ρίζες που θα πρέπει να βρείτε είναι  $\rho_1 = 1.5$ ,  $\rho_2 = 2$  και  $\rho_3 = 3$ .) Τέλος, πάρτε  $TOL = 1.e-6$ ,  $NMAX = 50$  και τρέξτε το πρόγραμμά σας με  $x_0 = 1, 1.8, 2.5, 2.8, 5$  και  $\frac{26-\sqrt{28}}{12}, \frac{26+\sqrt{28}}{12}$ . Τι παρατηρείτε;
3. Αποδείξτε αναλυτικά (δηλ. με μελέτη συναρτησης) ότι η εξίσωση  $f(x) := 3^{-x} - 5x$  έχει μία μοναδική πραγματική ρίζα  $\rho$  και παρατηρήστε ότι  $\rho \in [0, 4]$ . Σχεδιάστε με την βοήθεια του matlab την γραφική παράσταση της  $f(x)$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1 (που υλοποιεί τη μέθοδο του Νεύτωνα), με παραμέτρους  $x_0 = 4$ ,  $TOL = 1.e - 6$  και  $NMAX = 50$  για να υπολογίσετε την  $\rho$ . Τρέξτε το πρόγραμμα bisection.m με παράμετρους  $a = 0, b = 4$  και  $TOL = 1.e - 6$ . Σε πόσες επαναλήψεις συγκλίνει η μέθοδος του Νεύτωνα και σε πόσες της διχοτόμησης; Γιατί;
4. Σχεδιάστε με την βοήθεια του matlab την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 8x^3 - 6 \arctan(2x)$  και παρατηρήστε ότι έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες (τις  $-\rho, 0, \rho$ , όπου  $\rho > 0$ ). Χρησιμοποιώντας  $TOL = 1.e - 06$  και  $NMAX = 50$ , υπολογίστε τις ρίζες με  $x_0 = -1, -0.6, -0.4, -0.2, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.9$  και 1. Τι παρατηρείτε;

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την Τρίτη 25/10/2010.
- Η εξέταση είναι ατομική!
- Όποιος θέλει μπορεί να φέρει τον προσωπικό του υπολογιστή στην εξέταση.
- Στην εξέταση θα πρέπει να έχετε μαζί σας την φοιτητική σας ταυτότητα.