

## 4η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς

$$u_t + 2u_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T_f] \quad (1)$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = u_0(x) = e^{-\beta \left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}$$

και περιοδικές συνθήκες στα άκρα. Γράψτε δύο προγράμματα που να υλοποιούν τις μεθόδους upwind και Lax-Wendroff, αντίστοιχα. Θεωρήστε ομοιόμορφο διαμερισμό με χρονικό βήμα  $\tau := T_f/N_t$  για το διάστημα  $[0, T_f]$  (δηλ.  $t_n = (n-1)\tau$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_t + 1$ ), και ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα  $h := (b-a)/N_x$  για το διάστημα  $[a, b]$  (δηλ.  $x_i = a + (i-1)h$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_x + 1$ ). Τα προγράμματά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζουν και να εκτυπώνουν στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου στην τελευταία χρονική στιγμή, δηλ. το  $\max_{1 \leq i \leq N_x+1} |U_i^{N_t+1} - u(T_f, x_i)|$ .

- (α') Δοκιμάστε τα πρόγραμμά σας για τα ακόλουθα δεδομένα:  $T_f = 1$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $\beta = 100$ .
- (β') Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς παίρνοντας τον αριθμό Courant  $\nu := \tau/h = 0.4$ . (Πάρτε π.χ.  $N_x = 40, 80, 160, 320$  και  $N_t = 100, 200, 400, 800$ , αντίστοιχα).
- (γ') Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της για  $t = T_f$  για καθεμιά από τις δύο μεθόδους.
- (δ') Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας των δύο μεθόδων.
- (ε') Δημιουργήστε ένα μικρό video που να παρουσιάζει την εξέλιξη στο χρόνο της ακριβούς και της υπολογιστικής λύσης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους.
- (ς') Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα παίρνοντας την τιμή της παραμέτρου  $\beta = 500$ . Τι παρατηρείτε;
- (ζ') Επαναλάβετε τα παραπάνω για διαφορετικές τιμές του  $\nu$ , και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + 2tx^2u_x = 0, & x \in [0, 2], \quad t \in [0, 1], \\ u(0, x) = u_0(x) = e^{-\beta \left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}, & x \in [0, 2], \\ u(t, 0) = 0, & t \in [0, 1], \end{cases} \quad (2)$$

Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς της αρεσκείας σας με τη μέθοδο upwind. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση (που πρέπει φυσικά να την υπολογίσετε) και τις προσεγγίσεις της, για  $t = T_f$ , καθώς και σε ενδιάμεσους χρόνους.

## ΟΔΗΓΙΕΣ :

- I. Ημερομηνία και ώρα κατάθεσης μέχρι 8/12, 23h59. Δε θα γίνει τίποτα δεκτό πέραν αυτής της ώρας.
- II. Η εξέταση της άσκησης θα γίνει σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- III. Στην αναφορά σας θα πρέπει να περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και γραφήματα με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους. Η αναφορά πρέπει να κατατεθεί ως χωριστό pdf αρχείο ηλεκτρονικά και να έχει το ίδιο όνομα που θα έχει και ο κώδικας (βλέπε V). Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονόμα σας και τον αριθμό μητρώου σας στην πρώτη σελίδα της αναφοράς. Αναφορές χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.
- IV. Ο κώδικας θα πρέπει να κατατεθεί ως ένα compressed αρχείο το οποίο όταν θα γίνεται uncompressed θα φτιάχνει ένα directory που θα περιέχει όλα τα αρχεία που χρειάζεστε για την άσκηση. Το όνομα του αρχείου πρέπει να είναι CAM.tgz (ή CAM.zip) ή MAM.tgz ή FAM.tgz όπου το αρχικό C ή M ή F δηλώνει αν χρησιμοποιήτε C ή *matlab* ή FORTRAN και AM είναι ο αριθμός μητρώου σας (AM1-MA2 σε περίπτωση ομάδας). Το όνομα του directory που δημιουργείται πρέπει να είναι ίδιο με το όνομα του .tgz αρχείου.
- V. Στέλνετε μόνο το πρόγραμμα: τον κώδικα, όχι το εκτελέσιμο, ούτε τα αποτελέσματα.
- VI. Μην ξεχάσετε να γράψετε το όνομά σας και τον αριθμό μητρώου σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματός σας. Προγράμματα χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.
- VII. Επιπλέον βαθμοί θα δωθούν στις καλά δομημένες και σχολιασμένες αναφορές. Θα αξιολογηθεί επίσης θετικά η σαφήνεια και η απλότητα του κώδικα. Όμοιες ασκήσεις (είτε κώδικες είτε αναφορές) θα μηδενιστούν.

Για πληροφόρηση, <http://csmajor.stanford.edu/HonorCode.shtml>