

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση με ένα στατικό πρόβλημα σε ετερογενή μέσο. Υποθέτουμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι μία ανοικτή, φραγμένη περιοχή με ομαλό σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$, και υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

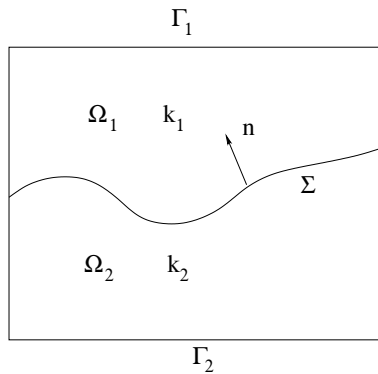
$$k(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in \Omega \tag{1}$$

Θέλουμε να βρούμε u λύση του ελλειπτικού προβλήματος

$$\begin{cases} k(x)\Delta u(x) = f(x) & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Θεώρουμε ότι η περιοχή Ω χωρίζεται σε δύο υποπεριοχές $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, και ότι η συνάρτηση $k(x)$ είναι σταθερή σε κάθε περιοχή

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{στην } \Omega_1 \\ k_2 & \text{στην } \Omega_2 \end{cases} \tag{3}$$



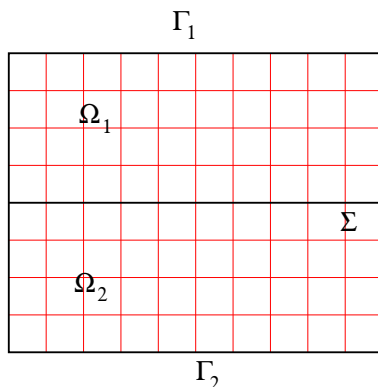
Σχήμα 1: Η περιοχή $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Συμβολίζουμε με Σ το σύνορο μεταξύ Ω_1 και Ω_2 , $\Sigma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$, $\Gamma_j = \Gamma \cap \partial\Omega_j$, $j = 1, 2$.

Υποθέτουμε ότι $\Omega = [-1, 1]^2$ και θεωρούμε ότι $\Sigma = [-1, 1] \times \{y = 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ και $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα (2) χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές. Φτιάξτε μια διακριτοποίηση της περιοχής Ω χρησιμοποιώντας ομοιόμορφο διαμερισμό με $h_x = h_y = h$ και έστω $(M_i)_{i=1..N_s}$ τα σημεία της διακριτοποίησης όπου N_s είναι ο ολικός αριθμός των σημείων. Έχουμε $N_s = N_i + N_d$, με N_i τα εσωτερικά σημεία (που δεν ανοικούν στο σύνορο $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) και N_d τα σημεία που ανήκουν στο σύνορο Γ με την συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

Κατασκευάστε ένα πλέγμα της περιοχής Ω , έτσι ώστε η διεπιφάνεια Σ να συμπίπτει με τις πλευρές των τετραγώνων (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2: Παράδειγμα διακριτοποίησης

1. Δείξτε ότι το διακριτό πρόβλημα γράφεται σαν γραμμικό σύστημα :

$$KU = F \quad (4)$$

με $U = (u_J)_{J=1, N_i}$ και $u_J = 0$ εάν M_J ανήκει στο σύνορο Γ . Γράψτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του άκαμπτου πίνακα K . Χρειάζεται προσοχή στα σημεία που ανήκουν στη διεπιφάνεια. Μην ξεχάσετε να λάβετε υπόψη τη συνθήκη Dirichlet όπως είπαμε στην τάξη. Για τον υπολογισμό του δεύτερου μέλους προσεγγίζουμε το f με τις τιμές του στα σημεία M_J ,

$$f_J = f(M_J)$$

2. Γράψτε ένα πρόγραμμα επίλυσης του προσεγγιστικού προβλήματος.
3. Αρχικά τρέξτε το πρόγραμμα για την περίπτωση $k = \text{σταθερά}$. Χρησιμοποιήστε γνωστές ακριβείς λύσεις για να ελέγξετε το πρόγραμμά σας. Για παράδειγμα για $k = 1$ και

$$f(x, y) = -2((x^2 - 1) + (y^2 - 1))$$

η ακριβής λύση είναι

$$u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

4. Γράψτε ένα υποπρόγραμμα που να υπολογίζει το λάθος $u - u_h$ στη νόρμα $L^\infty(\Omega)$.
5. Με διαδοχικές διαμερίσεις ($h = 1/10, h = 1/20, h = 1/30, \dots$) βρείτε την τάξη σύγκλισης της μεθόδου (για το πρόβλημα με $k = 1$ και χρησιμοποιώντας την ακριβής λύση που αναφέρεται στο ερώτημα 3).

6. Τρέξτε το πρόγραμμα για

$$(k_1, k_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 10), (2, 1), (10, 1)$$

και

$$f(x, y) = -2((x^2 - 1) + (y^2 - 1))$$

Βεβαιωθείτε ότι η λύση σας συγκλίνει καθώς μειώνεται το h .

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- I. Ημερομηνία και ώρα κατάθεσης μέχρι 23/11, 23h59. Δε θα γίνει τίποτα δεκτό πέραν αυτής της ώρας.
- II. Η εξέταση της άσκησης θα γίνει σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- III. Στην αναφορά σας θα πρέπει να περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και γραφήματα με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους. Η αναφορά πρέπει να κατατεθεί ως χωριστό pdf αρχείο ηλεκτρονικά και να έχει το ίδιο όνομα που θα έχει και ο κώδικας (βλέπε V). Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονόμα σας και τον αριθμό μητρώου σας στην πρώτη σελίδα της αναφοράς. Αναφορές χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.
- IV. Ο κώδικας θα πρέπει να κατατεθεί ως ένα compressed αρχείο το οποίο όταν θα γίνεται uncompressed θα φτιάχνει ένα directory που θα περιέχει όλα τα αρχεία που χρειάζεστε για την άσκηση. Το όνομα του αρχείου πρέπει να είναι CAM.tgz (ή CAM.zip) ή MAM.tgz ή FAM.tgz όπου το αρχικό C ή M ή F δηλώνει αν χρησιμοποιήτε C ή matlab ή FORTRAN και AM είναι ο αριθμός μητρώου σας (AM1-MA2 σε περίπτωση ομάδας). Το όνομα του directory που δημιουργείται πρέπει να είναι ίδιο με το όνομα του .tgz αρχείου.
- V. Στέλνετε μόνο το πρόγραμμα: τον κώδικα, όχι το εκτελέσιμο, ούτε τα αποτελέσματα.
- VI. Μην ξεχάσετε να γράψετε το όνομά σας και τον αριθμό μητρώου σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματός σας. Προγράμματα χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.
- VII. Επιπλέον βαθμοί θα δωθούν στις καλά δομημένες και σχολιασμένες αναφορές. Θα αξιολογηθεί επίσης θετικά η σαφήνεια και η απλότητα του κώδικα. Όμοιες ασκήσεις (είτε κώδικες είτε αναφορές) θα μηδενιστούν.

Για πληροφόρηση, <http://csmajor.stanford.edu/HonorCode.shtml>