1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ -u'(a) + \sigma_1 u(a) = 0, \\ \ \ u'(b) + \sigma_2 u(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

όπου $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, και $\sigma_1,\ \sigma_2 \geq 0$. Θεωρήστε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = (b-a)/N$ (δηλαδή οι κόμβοι είναι $x_i = a + (i-1)h,\ i = 1,2,\ldots,N+1$). Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει προσεγγίσεις U_i των τιμών $u(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,N+1$, με τη συνήθη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Δηλαδή, θα πρέπει να υπολογίζετε τις προσεγγίσεις U_i με το αριθμητικό σχήμα:

$$\begin{cases} \ \ \frac{2}{h^2}(U_1 - U_2) + 2\frac{\sigma_1}{h}U_1 + q(x_1)U_1 = f(x_1) \\ -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 2,3,\ldots,N, \\ -\frac{2}{h^2}(U_N - U_{N+1}) + 2\frac{\sigma_2}{h}U_{N+1} + q(x_{N+1})U_{N+1} = f(x_{N+1}). \end{cases} \tag{2}$$

Οι q, f και η ακριβής λύση u θα πρέπει να δίνονται ως υποπρογράμματα function και να καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα όταν είναι απαραίτητο. Το προγράμμά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζει και να εκτυπώνει στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου $\max_{1\leq i\leq N+1} |U_i - u(x_i)|$.

(α′) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για τα ακόλουθα δεδομένα: $[a,b] = [0,4]$, $q(x) = \pi\Big[1 - \cos(\frac{\pi}{2}x)\Big]$, $f(x) = (\frac{\pi}{4}+1)\,\pi x \sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{2}x\sin(\pi x) - \pi$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 2\pi$, οπότε $u(x) = x\sin(\frac{\pi}{2}x) - 1$.

(β′) Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς με $N = 25, 50, 100, 200, 400$ υποδιαστήματα.

(γ′) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της για $N = 100$ υποδιαστήματα, και αποθηκεύστε το σχήμα σε ένα (postscript) αρχείο.

(δ′) Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας της μεθόδου.
Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Έστω $\mathcal{E}(N)$ το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου για N υποδιαστήματα, και ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}(N) \approx Ch^p$, όπου η σταθερά h είναι ανεξάρτητη του h και του N. Τότε

$$\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)}\right)}{\log 2}.$$

(ε′) Σχεδιάστε ένα $\log\log$ γράφημα του σφάλματος $\mathcal{E}(N)$ συναρτήσει του αριθμού των υποδιαστημάτων N, με $N = 25, 50, 100, 200, 400$.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -u'' + qu = f, \quad x \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

όπου $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γράψτε ένα πρόγραμμα που να επιλύει το πρόβλημα (3) για μη ομοιόμορφο διαμερισμό ακολουθώντας τις οδηγίες στις αντίστοιχες σημειώσεις. Χρησιμοποιήστε στο πρόγραμμά σας τα δεδομένα του παραδείγματος των σημειώσεων, δηλαδή $[a,b] = [0,4]$, $q(x) := 4$, $f(x) := 16\pi\Big(\pi \sin(4\pi x) + \cos(4\pi x)\Big)\, \mathrm{e}^{-2x}$. Τότε η ακριβής λύση είναι: $u(x) = \sin(4\pi x)\, \mathrm{e}^{-2x}$. Με το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναπαραγάγετε τα αποτελέσματα των σημειώσεων.

3. Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 1, \quad x \in [a,b] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

όπου ε είναι δεδομένη θετική σταθερά. Βρείτε την ακριβή λύση του προβλήματος. Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την αριθμητική επίλυση του (4), και υλοποιήστε την σε ένα πρόγραμμα. Τρέξτε το πρόγραμμά σας για $\varepsilon = 0.25$ και $\varepsilon = 0.0025$ χρησιμοποιώντας διαμερισμούς με 25, 50, 100, 200 και 400 υποδιαστήματα. Πιστεύετε ότι είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσετε μη ομοιόμορφο διαμερισμό; Αν, ναί, πραγματοποιήστε το.

ΟΔΗΓΙΕΣ :

I. Αν αποφασίσετε να δουλέψετε σε ομάδες των <u>δύο</u> ατόμων, τότε οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις.

II. Ημερομηνία και ώρα κατάθεσης μέχρι 19/10, 23h59. Δε θα γίνει τίποτα δεκτό πέραν αυτής της ώρας. Οδηγίες για την κατάθεση θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

III. Η εξέταση της άσκησης θα γίνει σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

IV. Στην αναφορά σας θα πρέπει να περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και γραφήματα με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους. Η αναφορά πρέπει να κατατεθεί ως χωριστό pdf αρχείο ηλεκτρονικά και να έχει το ίδιο όνομα που θα έχει και ο κώδικας (βλέπε V). Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονόμά σας και τον αριθμό μητρώου σας στην πρώτη σελίδα της αναφοράς. Αναφορές χωρίς ονόμα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.

V. Ο κώδικας θα πρέπει να κατατεθεί ως ένα compressed αρχείο το οποίο όταν θα γίνεται uncompressed θα φτιάχνει ένα directory που θα περιέχει όλα τα αρχεία που χρειάζεστε για την άσκηση. Το όνομα του αρχείου πρέπει να είναι CAM.tgz (ή CAM.zip) ή MAM.tgz ή FAM.tgz όπου το αρχικό C ή M ή F δηλώνει αν χρησιμοποιήτε C ή *matlab* ή FORTRAN και AM είναι ο αριθμός μητρώου σας (AM1-MA2 σε περίπτωση ομάδας). Το όνομα του directory που δημιουργείται πρέπει να είναι ίδιο με το όνομα του .tgz αρχείου.

VI. Στέλνετε μόνο το πρόγραμμα: τον κώδικα, όχι το εκτελέσιμο, ούτε τα αποτελέσματα.

VII. Μην ξεχάσετε να γράψετε το όνομά σας και τον αριθμό μητρώου σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματός σας. Προγράμματα χωρίς όνομα ή/και αριθμό μητρώου ΔΕΝ θα βαθμολογηθούν.

VIII. Επιπλέον βαθμοί θα δωθούν στις καλά δομημένες και σχολιασμένες αναφορές. Θα αξιολογηθεί επίσης θετικά η σαφήνεια και η απλότητα του κώδικα. Όμοιες ασκήσεις (είτε κώδικες είτε αναφορές) θα μηδενιστούν.

Για πληροφόρηση, http://csmajor.stanford.edu/HonorCode.shtml