ΤΕΜ-507 – Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

2ο φυλλάδιο ασκήσεων – Παράδοση: **23 Μαρτίου 2015, 11:00**

1. Θεωρούμε το πρόβλημα δύο σημείων $-u'' + ru' + qu = f$ σε ένα διάστημα (a,b) με συνοριακές συνθήκες $u(a) = u(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι $q, f \in C[a,b]$ και $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, ενώ r είναι μια σταθερά. Αποδείξτε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει το πολύ μία κλασσική λύση.

2. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Δείξτε επίσης ότι

$$a + b \leq \left((1+\epsilon)a^2 + (1+1/\epsilon)b^2\right)^{1/2}.$$

3. Βρείτε την ασθενή παράγωγο της συνάρτησης $u(x) = 1 - |x|$ στο διάστημα $[-1,1]$. Έχει η u ασθενή παράγωγο δεύτερης τάξης;

4. Θεωρείστε το πρόβλημα $-u'' + qu = f$ στο $[a,b]$ με συνοριακές συνθήκες $u'(a) = u'(b) = 0$, όπου $q, f \in C[a,b]$ και $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε πρώτα ότι

$$\max_{a \leq x \leq b} |v(x)| \leq |v(y)| + \sqrt{b-a}\,\|v'\|, \qquad \forall y \in [a,b].$$

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω και την προφανή σχέση

$$(qv, v) \geq \min_{a \leq x \leq b} |v(x)|^2 \int_a^b q(x)\,dx,$$

για να αποδείξετε ότι

$$\max_{a \leq x \leq b} |u(x)| \leq C \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$