

## TEM-507 – Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

1ο φυλλάδιο ασκήσεων – Παράδοση: 11 Μαρτίου 2015, 11:00

1. Αποδείξτε τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in H,$$

όπου  $H$  χώρος Hilbert και  $\|\cdot\|$  η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο του χώρου  $H$ .

2. Έστω  $G$  ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert και  $P : H \rightarrow H$  ο τελεστής προβολής στον υπόχωρο  $G$ . Αποδείξτε ότι ο  $P$  είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής στον  $H$  τέτοιος ώστε  $P^2 = P$  και  $\|P\| = 1$ . Δείξτε επίσης ότι  $\text{Ran}(P) = G$ ,  $\text{ker}(P) = G^\perp$ ,  $\text{Ran}(I - P) = G^\perp$  και  $\text{ker}(I - P) = G$ .
3. Έστω  $A$  ο  $m \times m$  πίνακας με στοιχεία  $A_{ij} = B(\phi_j, \phi_i)$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , όπου  $\{\phi_j\}_{j=1}^m$  βάση του υπόχωρου πεπερασμένης διάστασης  $S_h \subset H$ ,  $\dim(S_h) = m$ . Δείξτε ότι ο  $A$  είναι θετικά ορισμένος.