ΤΕΜ-401 Θέματα στην Αριθμητική Ανάλυση – Ιανουάριος 2012

Παραδώστε τις παρακάτω ασκήσεις μέχρι 13-01-2012.

1. Αν $v \in \mathbb{R}^n$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, ο $n \times n$ πίνακας

$$P = I - 2vv^T/v^Tv$$

λέγεται πίνακας Householder. Οι πίνακες Householder είναι προφανώς συμμετρικοί και ορθογώνιοι. Οι πίνακες Householder είναι χρήσιμοι λόγω της ικανότητάς τους να μηδενίζουν επιλεγμένες συνιστώσες ενός διανύσματος. Υποθέστε τώρα ότι $x \in \mathbb{C}^n$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $x_1 = |x_1|e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$P = I - 2uu^H/u^Hu, \qquad u = x + e^{i\theta}\|x\|_2 e_1$$

όπου e_1 είναι το διάνυσμα $(1, 0, \ldots, 0)^T$, είναι ορθοκανονικός και επιπλέον $Px = -e^{i\theta}\|x\|_2 e_1$.

2. Αποδείξαμε στη διάρκεια του μαθήματος το Θεώρημα Ιδιαζουσών Τιμών (SVD): αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τότε υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες

$$U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

τέτοιοι ώστε $U^TAV = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ όπου $p = \min\{m, n\}$ και οι ιδιάζουσες τιμές ικανοποιούν

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0.$$

Εδώ, u_i, v_i είναι οι στήλες των πινάκων U και V, αντίστοιχα. Υποθέστε ότι υπάρχει ακέραιος $r > 0$ τέτοιος ώστε

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p = 0.$$

Δείξτε ότι

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T = U_r \Sigma_r V_r^T,$$

όπου

$$U_r = [u_1, \ldots, u_r], \quad V_r = [v_1, \ldots, v_r], \quad \Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r).$$

3. Ορίσαμε στο μάθημα τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης f από τον τύπο

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx,$$

και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-ikx}\,dk.$$

Αποδείξτε τη σχέση

$$2\pi \int_{\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}\,dk$$

και συμπεράνετε την ισότητα του Parseval (ή Plancherel)

$$2\pi \int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\,dk.$$

Επιβεβαιώστε τη σχέση του Parseval στην περίπτωση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

όπου $a > 0$. Επίσης, χρησιμοποιήστε τη σχέση του Parseval και τη συνάρτηση $f(x) = e^{-a|x|}$ για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^2}.$$

4. Έστω ότι $f \in C^1[a, b]$ και p είναι πολυώνυμο τέτοιο ώστε $\|f' - p\| < \epsilon$ όπου $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα μεγίστου στο διάστημα $[a, b]$. Αποδείξτε ότι για το πολυώνυμο

$$q(x) = \int_a^x p(x)\, dx + f(a)$$

ισχύει $\|q - f\| < (b - a)\epsilon$.

5. Ξέρουμε από το Θεώρημα του Weierstrass ότι κάθε συνεχής συνάρτηση προσεγγίζεται όσο καλά θέλουμε (στη νόρμα μεγίστου) από πολυώνυμα. Ξέρουμε επίσης ότι άν $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 1$ τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τέτοιο ώστε $q(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Στην άσκηση αυτή εξετάζουμε κατά πόσο είναι δυνατόν να βρούμε πολυώνυμο p τέτοιο ώστε όχι μόνο $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ για όλα τα $x \in [-1, 1]$ αλλά και $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Προσέξτε ότι εδώ δεν περιορίζουμε το βαθμό του πολυωνύμου p. Ξεκινήστε με το πολυώνυμο

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \tilde{p}(x_i)) L_i(x),$$

όπου $L_i \in \mathbb{P}_{n-1}$ είναι το i–στό πολυώνυμο Lagrange και $\tilde{p}$ είναι το πολυώνυμο που βρίσκεται ϵ-κοντά στη συνάρτηση f. Τι ιδιότητες παρεμβολής έχει? Χρησιμοποιήστε τα πολυώνυμα r και $\tilde{p}$ για να ορίσετε ένα τρίτο πολυώνυμο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της άσκησης.