Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις. Μπορείτε, και πρέπει, να χρησιμοποιήσετε το MATLAB για να υπολογίσετε ότι ζητάει το πρόβλημα. Δείξτε τη δουλειά σας!

Ονοματεπώνυμο...**Α.Μ.**...........

1. Δείξτε ότι η $f(x) = e^x - 3x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

   Έχουμε, $f(0) = 1 > 0$ και $f(1) = e - 3 < 0$, άρα υπάρχει ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$. Επίσης, $f'(x) = e^x - 3 < 0$ στο $(0, 1)$ επομένως, η f είναι γνήσια φθίνουσα και η ρίζα είναι μοναδική.

2. Προτείνετε μια επαναληπτική μέθοδο (όχι διχοτόμηση, ούτε Newton) για την προσέγγιση αυτής της ρίζας. Βρείτε και γράψτε (με 4 δεκαδικά ψηφία) τις πρώτες τρεις προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδός σας. Συγκλίνει; Μπορείτε να το αποδείξετε;

   Η $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $x = \phi(x)$ με $\phi(x) = \frac{e^x}{3}$. Η συνάρτηση $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί $\phi(0) = \frac{1}{3}$, $\phi(1) = \frac{e}{3}$ και $\phi'(x) = \frac{e^x}{3} > 0$ άρα $\phi([0, 1]) = [\frac{1}{3}, \frac{e}{3}] \subset [0, 1]$. Ακόμα, $\max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \frac{e}{3} < 1$ άρα η ϕ είναι συστολή στο $[0, 1]$. Από το θεώρημα της συστολής, η ακολουθία (x_n), με $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της ϕ στο $[0, 1]$, για κάθε $x_0 \in [0, 1]$. Με $x_0 = 0$ έχουμε $x_1 = \phi(x_0) = 0.3333$, $x_2 = \phi(x_1) = 0.4652$, $x_3 = \phi(x_2) = 0.5308$ (από το πρόγραμμα `fixedpt.m`).

3. Δείξτε ότι η $f(x) = 4 \ln x - x = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \in (1, 2)$ και $\rho_2 \in (8, 9)$.

   Έχουμε $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = 4 \ln 2 - 2 > 0$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Επίσης, $f(8) = 4 \ln 8 - 8 > 0$ και $f(9) = 4 \ln 9 - 9 < 0$, άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(8, 9)$. Τώρα $f'(x) = \frac{4}{x} - 1$ επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, 1)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(8, 9)$ Οι ρίζες αυτές είναι λοιπόν μοναδικές. Λόγω της μονοτονίας της f δεν υπάρχει άλλη ρίζα.

4. Προτείνετε μια επαναληπτική μέθοδο (όχι διχοτόμηση, ούτε Newton) για την προσέγγιση της ρίζας ρ_2. Βρείτε και γράψτε (με 4 δεκαδικά ψηφία) τις πρώτες τρεις προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδός σας. Συγκλίνει; Μπορείτε να το αποδείξετε;

   Η $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $x = \phi(x)$ με $\phi(x) = 4 \ln x$. Έχουμε $\phi(8) = 4 \ln 8 \approx 8.3178$ και $\phi(9) = 4 \ln 9 \approx 8.7889$. Επιπλέον, $\phi'(x) = \frac{4}{x} > 0$ στο $[8, 9]$ άρα $\phi([8, 9]) = [4 \ln 8, 4 \ln 9] \subset [8, 9]$. Επιπλέον, $\max_{8 \leq x \leq 9} |\phi'(x)| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$. Από το θεώρημα της συστολής, η ακολουθία (x_n), με $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της ϕ στο $[8, 9]$, για κάθε $x_0 \in [8, 9]$. Με $x_0 = 8$ έχουμε $x_1 = \phi(x_0) = 8.3178$, $x_2 = \phi(x_1) = 8.4736$, $x_3 = \phi(x_2) = 8.5478$ (από το πρόγραμμα `fixedpt.m`).

5. Δείξτε ότι η $\phi(x) = \cos x$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο. Βρείτε μια προσέγγισή του με τέσσερα σωστά δεκαδικά ψηφία.

   Η $\phi : [-1, 1] \to [-1, 1]$ με $\phi(x) = \cos x$ είναι συστολή στο $[-1, 1]$ γιατί

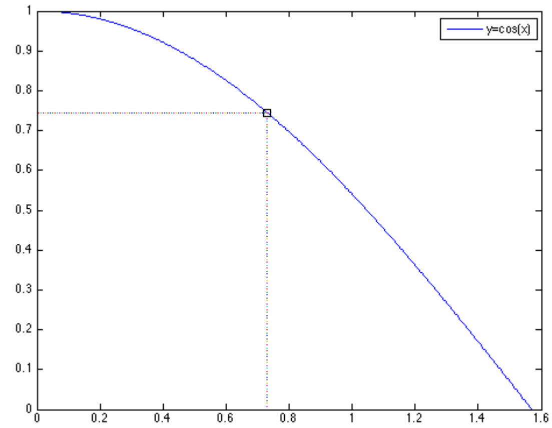
   $$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\sin x| = \sin 1 < 1.$$

   Από το θεώρημα της συστολής, η ακολουθία (x_n), με $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της ϕ στο $[-1, 1]$, για κάθε $x_0 \in [-1, 1]$. Για την ακρίβεια, συγκλίνει για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ μια και $x_1 = \phi(x_0) \in [-1, 1]$. Από το πρόγραμμα `fixedpt.m`, με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$ και `tol` $= 10^{-5}$, παίρνουμε την προσέγγιση 0.7391.

6. Ποιό είναι το εμβαδόν του μεγαλύτερου παραλληλογράμμου που μπορεί να εγγραφεί μεταξύ του γραφήματος της $y = \phi(x)$ για $0 \leq x \leq \pi/2$ και των θετικών ημιαξόνων;

   Ορίζουμε $f(x) = x \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$ (δείτε το Σχήμα 1). Έχουμε $f(0) = f(\pi/2) = 0$, οπότε από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, \pi/2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Έχουμε $f'(x) = \cos x - x \sin x$.

Για να προσδιορίσουμε το σημείο ξ χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα `bisect.m` στο διάστημα $[0, \pi/2]$. Σημειώστε ότι $f'(0) = 1 > 0$ ενώ $f'(\pi/2) = -\pi/2 < 0$. Χρησιμοποιώντας `tol` $= 10^{-5}$, παίρνουμε την προσέγγιση $\xi = 0.86033$. Επειδή $f''(x) = -2\sin x - x\cos x = -(2\sin x + x\cos x) \geq 0$ στο $[0, \pi/2]$, το ξ είναι τοπικό μέγιστο. Επομένως το εμβαδόν του μεγαλύτερου παραλληλογράμμου είναι $\xi \cos \xi = 0.5611$.



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.

7. Αποδείξτε ότι η $f(x) = e^{-2x} \sin x$ έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο στο διάστημα $[0, \pi]$.

   Έχουμε $f(0) = f(\pi) = 0$, άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως, $f'(x) = e^{-2x}(\cos x - 2\sin x)$ είναι γνήσια μονότονη άρα το σημείο ξ είναι μοναδικό.

8. Σχεδιάστε μια επαναληπτική μέθοδο για την προσέγγιση αυτού του τοπικού ακρότατου και υπολογίστε το με τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

   Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη μέθοδο του Newton είτε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο διάστημα $[0, \pi]$. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα `bisect.m` με `tol` $= 10^{-5}$, παίρνουμε την προσέγγιση $\xi = 0.463652$.

9. Έστω $f(x) = 4\ln x - x$ για $x > 0$. Υπάρχει $\tilde{x} > 0$ έτσι ώστε η εφαπτομένη στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ να περνάει από το σημείο $(1, 0)$;

   Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση
   $$0 - f(\tilde{x}) = f'(\tilde{x})(1 - \tilde{x}),$$
   έχει (μοναδική) ρίζα. Αντικαθιστώντας τους τύπους για τις $f(\tilde{x})$ και $f'(\tilde{x})$ καταλήγουμε στην εξίσωση $4\ln \tilde{x} + \frac{4}{\tilde{x}} - 5 = 0$. Αν $g(x) = 4\ln x + \frac{4}{x} - 5$, τότε $g(1) = -1 < 0$ και $g(4) = 4\ln 4 - 4 > 0$ άρα υπάρχει $\tilde{x} \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $g(\tilde{x}) = 0$. Ακόμα, $g'(x) = \frac{4}{x^2}(x - 1) > 0$ για $x \in (1, 4)$ άρα το ξ είναι μοναδικό.

10. Σχεδιάστε μια επαναληπτική μέθοδο για την προσέγγιση του $\tilde{x}$ και υπολογίστε το με τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

    Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο $(1, 4)$. Με το πρόγραμμα `bisect.m` με `tol` $=$ 10^{-5}, παίρνουμε την προσέγγιση $\xi = 2.228254$.