1 Σύντομη επανάληψη βασικών εννοιών

Μερικές χρήσιμες ταυτότητες

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Ανισότητα Cauchy–Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Ανισότητα του Bernoulli. Για όλα τα $r \geq 1$ και $x \geq -1$

$$(1+x)^r \geq 1 + xr$$

Ανισότητα του αριθμητικού–γεωμετρικού–αρμονικού μέσου. Αν x_i είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

με ισότητα μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

'Ορια, συνέχεια, παραγωγισιμότητα. Γράφουμε $\lim_{x\to a} f(x) = L$ όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - L| < \epsilon$ όταν $0 < |x - a| < \delta$. Η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x αν $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

Αν το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

υπάρχει, σημειώνεται ως $f'(x)$ ή $\frac{d}{dx}f(x)$ και ονομάζεται η **παράγωγος** της f στο σημείο x.

Το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και c είναι μεταξύ των τιμών $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = c$.

Το θεώρημα της μέσης τιμής. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(\xi)$$

Το θεώρημα του Taylor. Αν η f έχει παραγώγους μέχρι τάξη $n+1$ στο διάστημα $I = [a, b]$ τότε για κάθε $c, x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των c και x (το οποίο εξαρτάται, εν γένει, και από τα δύο). Η επόμενη μορφή του θεωρήματος του Taylor είναι πολλές φορές χρήσιμη: αν η f έχει παραγώγους μέχρι τάξη $n+1$ στο διάστημα $I = [a, b]$ τότε για κάθε $x \in I$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x + h \in I$

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των x και $x + h$.

Μερικοί τύποι από τον Διαφορικό λογισμό

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad (f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}, \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x, \qquad \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}, \qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}x^x = x^x(1 - \ln x), \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\log_a x = x^{-1}\log_a e$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{arcsec}\, x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{arccsc}\, x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = \mathrm{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\mathrm{csch}^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{sech}\, x = -\tanh x\, \mathrm{sech}\, x, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{csch}\, x = -\coth x\, \mathrm{csch}\, x$$

Χρήσιμες σειρές Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}x^k, \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}, \qquad -1 < x \le 1$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι σειρές Taylor συγκλίνουν γρήγορα κοντά στο σημείο ανπτύγματός τους και αργά ή καθόλου σε άλλα σημεία. Στο Σχήμα 1 φαίνεται η συνάρτηση $\sin x$ και τα μερικά αθροίσματα $S_1 = x, S_3 = x - \frac{x^3}{6}, S_5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ της σειράς Taylor.

Συμβολισμός κεφαλαίο-O. Λέμε ότι η f είναι κεφαλαίο-O της g (όταν $x \to \infty$) και γράφουμε $f(x) = O(g(x))$ αν υπάρχουν σταθερές N και c τέτοιες ώστε

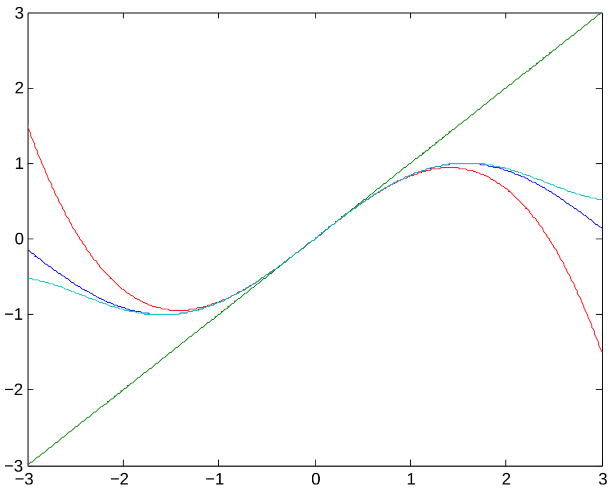
$$|f(x)| \le c|g(x)| \quad \forall\, x > N.$$

Για παράδειγμα, από το θεώρημα του Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi) \\ &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3) \end{aligned}$$

Εναλλάσσουσες σειρές. Αν $a_1 \ge a_2 \ge \cdots 0$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τότε η εναλλάσσουσα σειρά

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $\sin(x)$ και τα μερικά αθροίσματα S_1, S_3, S_5 της σειράς Taylor.

συγκλίνει, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

όπου S είναι το άθροισμα της σειράς και S_n τα μερικά αθροίσματά της. Επιπλέον, για κάθε n έχουμε

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Σημαντικά ψηφία, απόλυτο και σχετικό σφάλμα. Τα *σημαντικά ψηφία* ενός αριθμού είναι αυτά που βρίσκονται μεταξύ του πρώτου *μη μηδενικού* ψηφίου και του τελευταίου *σωστού* δεκαδικού ψηφίου.

Αν $\tilde{x}$ είναι μια προσέγγιση του αριθμού x τότε το *απόλυτο σφάλμα* του $\tilde{x}$ ως προσέγγιση του x είναι η ποσότητα $|x-\tilde{x}|$. Το *σχετικό σφάλμα* του $\tilde{x}$ ως προσέγγιση του x είναι η ποσότητα $|x-\tilde{x}|/|x|$, υπο την προϋπόθεση, βέβαια, ότι $x \neq 0$. Για παράδειγμα, αν $x = 0.00347$ και $\tilde{x} = 0.0035$ τότε ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων του $\tilde{x}$ είναι δύο (γιατί $\tilde{x} = 0.35 \times 10^{-2}$), το απόλυτο σφάλμα είναι 0.3×10^{-4} και το σχετικό σφάλμα 0.865×10^{-2}. Αν $y = 30.158$ και $\tilde{y} = 30.16$ τότε ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων τοτ $\tilde{y}$ είναι τέσσερα (γιατί $\tilde{y} = 0.3016 \times 10^{2}$), το απόλυτο σφάλμα είναι 0.2×10^{-2} και το σχετικό σφάλμα είναι 0.66×10^{-4}. Παρατηρήστε ότι το σχετικό σφάλμα είναι, και στις δύο περιπτώσεις, μια καλύτερη ένδειξη του αριθμού των σημαντικών ψηφίων συγκριτικά με το απόλυτο σφάλμα.

Ως ένα ακόμα παράδειγμα της σημασίας του αριθμού των σημαντικών ψηφίων σε μια σειρά υπολογισμών, λύνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 0.1036\,x + 0.2122\,y &= 0.7381 \\ 0.2081\,x + 0.4247\,y &= 0.9327 \end{aligned}$$

με την μέθοδο της απαλοιφής Gauss, πρώτα με τρία σημαντικά ψηφία και μετά με τέσσερα. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με τον πολλαπλασιαστή $0.208/0.104 \approx 2.0$ οπότε ο συντελεστής του x στην δεύτερη εξίσωση γίνεται $0.208 - (2.00)(0.104) \approx 0.208 - 0.208 = 0$ και ο συντελεστής του y $0.425 - (2.00)(0.212) \approx 0.425 - 0.424 = 0.001$. Η δεύτερη συνιστώσα του δεξιού μέλους γίνεται $0.933 - (2.00)(0.738) \approx 0.933 - 1.48 = -0.547$ και η λύση y του συτήματος είναι $y = -0.547/0.001 \approx -547$.

Αν κρατήσουμε τέσσερα σημαντικά ψηφία, τότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $0.2081/0.1036 \approx 2.009$. Ο συντελεστής του x στην δεύτερη εξίσωση γίνεται $0.2081 - (2.009)(0.1036) \approx 0.2081 - 0.2081 = 0$ και ο συντελεστής του y, $0.4247 - (2.009)(0.2122) \approx 0.4247 - 0.4263 = -0.00160$. Η δεύτερη συνιστώσα του δεξιού μέλους γίνεται $0.9327 - (2.009)(0.7381) \approx 0.9327 - 1.483 = -0.5503$, οπότε $y = -0.5503/(-0.0016) \approx 343.9$. Παρατηρήστε την τεράστια αλλαγή στη δεύτερη συνιστώσα της λύσης. Αν κάνουμε τις πράξεις με 10 σημαντικά ψηφία θα βρούμε $y = 356.29071$, λύση η οποία διαφέρει σημαντικά και από τις δύο προηγούμενες. Το συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε από το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ότι δεν πρέπει να στρογγυλοποιούμε τα δεδομένα πριν την εκτέλεση των πράξεων αλλά το αποτέλεσμά τους.

Αριθμητικά συστήματα. Αποκοπή και στρογγύλευση. Στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα για την παράσταση αριθμών. Στο σύστημα αυτό η βάση είναι το 10 και τα ψηφία οι αριθμοί $0, 1, \ldots, 9$. Έτσι ο αριθμός 3.14159 είναι ο $3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5}$ και, γενικά, αν $a_N, a_{N-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots$ είναι ψηφία τότε ο αριθμός $a_N a_{N-1} \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$ είναι ο

$$a_N \times 10^N + a_{N-1} \times 10^{N-1} + \cdots + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \cdots$$

Το *ακέραιο μέρος* του $a_N a_{N-1} \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$ είναι ο αριθμός $a_N a_{N-1} \cdots a_0$, με άλλα λόγια, η τιμή του πολυωνύμου

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

για $x = 10$, ενώ το *κλασματικό μέρος* του είναι η τιμής της δυναμοσειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} x^k$ για $x = 1/10$.
Αντί της βάσης $\beta = 10$ είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε άλλο ακέραιο $\beta \geq 2$. Τα υπολογιστικά συστήματα χρησιμοποιούν συνήθως $\beta = 2$, το λεγόμενο δυαδικό σύστημα, ενώ είναι χρήσιμο τόσο το οκταδικό σύστημα, $\beta = 8$, όσο και το δεκαεξαδικό σύστημα, $\beta = 16$. Στο τελευταίο σύστημα, τα ψηφία είναι $0, 1, \ldots, 9, a, b, c, d, e, f$, όπου τα σύμβολα a, b, c, d, e, f έχουν τις τιμές 10, 11, 12, 13, 14 και 15, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, $(10010)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 = (18)_{10}$, $(237)_8 = 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = (159)_{10}$ και, τέλος, $(3ac)_{16} = 3 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 12 \times 16^0 = (940)_{10}$.
Κατά την *αποκοπή* σε n ψηφία αγνοούμε όλα τα ψηφία μετά το n-στό δεκαδικό ψηφίο. Κατά την *στρογγύλευση* σε n δεκαδικά ψηφία δημιουργούμε ένα νέο αριθμό ο οποίος προσεγγίζει το αρχικό αριθμό με ελάχιστο σφάλμα. Αν το $(n+1)$-στό ψηφίο είναι 5 διαλέγουμε εκείνη την προσέγγιση της οποίας το n-στό ψηφίο είναι άρτιος αριθμός. Για παράδειγμα, $0.217 \approx 0.22, 0.365 \approx 0.36, 0.474 \approx 0.48$ και $0.366 \approx 0.37$.

1.1 Μερικά παραδείγματα

1. Προσεγγίζουμε την ποσότητα $\ln(1.1)$ χρησιμοποιώντας πέντε όρους από τη σειρά Taylor της $\ln(1+x)$ για $x = 0.1$. Έχουμε

$$\ln(1.1) \approx 0.1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} - \frac{0.0001}{4} + \frac{0.00001}{5} = 0.09531\,03333\ldots$$

   Η προσέγγιση αυτή έχει 6 σωστά δεκαδικά ψηφία.

2. Προσεγγίζουμε την τιμή e^8 από τη σειρά Taylor της e^x. Χρησιμοποιώντας έξι όρους από τη σειρά Taylor λαμβάνουμε

$$e^8 \approx 1 + 8 + \frac{64}{2} + \frac{512}{6} + \frac{4096}{24} + \frac{32768}{120} = 570.0666\ldots$$

   ενώ στην πραγματικότητα $e^8 = 2980.95798\,70417\ldots$.

3. Προσεγγίζουμε τις τιμές $\sqrt{1.00001}$ και $\sqrt{0.99999}$ χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Η f έχει παραγώγους κάθε τάξης για κάθε $x > 0$ και ειδικώτερα, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f'''(x) = \frac{1}{8}x^{-5/2}$, κ.ο.κ. Από το θεώρημα του Taylor λαμβάνουμε

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3\,\xi^{-5/2} \tag{1.1}$$

για κάποιο ξ στο διάστημα $(1, 1+h)$, αν $h > 0$. Θέτοντας $h = 10^{-5}$ στην (1.1) έχουμε

$$\sqrt{1.00001} \approx 1 + 0.5^{-5} - 0.125 \times 10^{-10} = 1.00000\,49999\,87500$$

Αντικαθιστώντας το h με $-h$ στην σχέση (1.1) έχουμε (επαληθεύστε το!)

$$\sqrt{1-h} = 1 - \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3\,\xi^{-5/2}$$

οπότε αν $h = 10^5$ λαμβάνουμε την προσέγγιση

$$\sqrt{0.99999} \approx 0.99999\,49999\,87500$$

Επειδή $1 < \xi < 1 + h$, το σφάλμα της προσέγγισης δεν υπερβαίνει το

$$\frac{1}{16}h^3\xi^{-5/2} < \frac{1}{16}10^{-15} = 0.00000\,00000\,00000\,0625$$

άρα οι δύο προσεγγίσεις έχουν 15 σωστά δεκαδικά ψηφία!

4. Πόσους όρους της σειράς Taylor της συνάρτησης $\sin x$ θα χρειαστούμε για να υπολογίσουμε το $\sin 1$ με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2}10^{-6}$;

Έχουμε

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

οπότε αν σταματήσουμε στον όρο $1/(2n-1)!$ το σφάλμα δεν υπερβαίνει τον επόμενο όρο δηλαδή $1/(2n+1)!$. Επομένως πρέπει να διαλέξουμε το n έτσι ώστε

$$\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{2}10^{-6},$$

ή, ισοδύναμα, $\log(2n+1)! > 6 + \log 2 = 6.3$. Επειδή $\log 10! \approx 6.6$, συμπεραίνουμε ότι $n = 5$ είναι αρκετό.