Η βαθμολογική αξία κάθε ερώτησης σε παρένθεση. Σύνολο μονάδων: 108. Άριστα: 100. Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!

Ονοματεπώνυμο...**Α.Μ.**...........

1. (14 μον.) Θεωρήστε τα δεδομένα (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3$, όπου τα σημεία x_i είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Αν $p_3 \in \mathbb{P}_3$ είναι το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στις τιμές y_i στα σημεία x_i, δείξτε ότι

$$p_3(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_0} p_2(x) + \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} q_2(x), \tag{1}$$

όπου $p_2 \in \mathbb{P}_2$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στα τρία πρώτα σημεία x_0, x_1, x_2 και $q_2 \in \mathbb{P}_2$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στα τρία τελευταία σημεία x_1, x_2, x_3.

Απάντηση. Είναι φανερό ότι το δεξί μέλος της (1), ας το πούμε $p(x)$, είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ τρία. Αν δείξουμε ότι $p(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, τότε, από τη μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής, προκύπτει ότι $p_3(x) = p(x)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις $p_2(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$, και $q_2(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$, έχουμε διαδοχικά, $p(x_0) = p_2(x_0) = y_0$,

$$p(x_1) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_0} p_2(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_3 - x_0} q_2(x_1) = \left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_0} + \frac{x_1 - x_0}{x_3 - x_0}\right) y_1 = y_1,$$
$$p(x_2) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_0} p_2(x_2) + \frac{x_2 - x_0}{x_3 - x_0} q_2(x_2) = \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_0} + \frac{x_2 - x_0}{x_3 - x_0}\right) y_2 = y_2,$$

και $p(x_3) = q_2(x_3) = y_3$, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

2. (14 μον.) Θεωρήστε τον 3×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την ανάλυση Cholesky για τον πίνακα A και χρησιμοποιήστε την για να λύσετε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με $b = (3, 7, -2)^T$.

Απάντηση. Αν L είναι ο πίνακας της ανάλυσης Cholesky έχουμε $L_{11} = \sqrt{A_{11}} = 1$, $L_{21} = A_{21}/L_{11} = 1$ και $L_{31} = A_{31}/L_{11} = 1$. Ακόμα, $L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} = 2$ και $L_{32} = (A_{32} - L_{31} \cdot L_{21})/L_{22} = 2$. Τέλος, $L_{33} = \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} = 3$, οπότε

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

και η λύση του $Ax = b$ είναι ισοδύναμη με τη λύση των τριγωνικών συστημάτων $Ly = b$ και $L^T x = y$. Εύκολα υπολογίζουμε $y = (3, 2, -3)^T$ και $x = (2, 2, -1)^T$.

3. Έστω $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$.

   (α΄) (6 μον.) Κάντε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες $-\rho, 0, \rho$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και μάλιστα $\rho \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$.

   (β΄) (10 μον.) Υπολογίστε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης με αρχικό διάστημα το $(\frac{\pi}{3}, \pi)$. Πόσο το πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση από την ρ;

   (γ΄) (14 μον.) Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_{n+1} = \phi(x_n)$ και $\phi(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Δείξτε χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συστολής ότι $x_n \to \rho$, για κάθε αρχική τιμή $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Απάντηση. Προφανώς $f(0) = 0$. Ακόμα, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ και $f(\pi) = \frac{\pi}{2} > 0$ άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(\frac{\pi}{3}, \pi)$. Ακόμα, $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ και $f''(x) = \sin x > 0$ για $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$, άρα $f'(x) > \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ για $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ και η f είναι γνήσια αύξουσα. Επομένως η ρίζα στο διάστημα $(\frac{\pi}{3}, \pi)$, έστω ρ, είναι μοναδική. Από το γεγονός ότι $f(-x) = -\frac{x}{2} - \sin(-x) = -f(x)$ προκύπτει ότι

$-\rho$ είναι επίσης ρίζα και μάλιστα μοναδική στο διάστημα $(-\pi, -\frac{\pi}{3})$. Το ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα προκύπτει από τις ανισότητες $\frac{x}{2} - 1 \le f(x) \le \frac{x}{2} + 1$, οι οποίες μας λένε ότι $f(x) > 0$ για $x > 2$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$.

Η πρώτη προσέγγιση της ρίζας ρ με την μέθοδο της διχοτόμησης είναι η $x_0 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \pi) = \frac{2\pi}{3}$. Έχουμε $f(x_0) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, άρα η ρ βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. Η δεύτερη προσέγγιση της ρίζας είναι η $x_1 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$. Έχουμε $f(x_1) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$ άρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$. Η τρίτη προσέγγιση της ρίζας είναι η $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) = \frac{7\pi}{12}$.

Δείχνουμε ότι η $\phi(x)$ ικανοποιεί στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος της συστολής. Κατ' αρχήν $\phi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} + 1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $\phi(\pi) = \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ακόμα $\phi'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$ η οποία μηδενίζεται για $x = \frac{2\pi}{3}$. Έχουμε $\phi(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, άρα η ϕ απεικονίζει το διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ στον εαυτό του. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η μέγιστη τιμή της $|\phi'(x)|$ είναι η $\frac{1}{2}$ και επομένως η ϕ είναι συστολή. Από το θεώρημα της συστολής έχουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο σταθερό σημείο x^* της ϕ στο στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Το σταθερό σημείο της $\phi(x)$ είναι ρίζα της $f(x)$ άρα αναγκαστικά $x^* = \rho$.

4. (12 μον.) Έστω $\epsilon > 0$ μια πολύ μικρή σταθερά. Υπολογίστε το δείκτη κατάστασης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ των πινάκων $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ -\epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}$. Πως συμπεριφέρεται ο δείκτης κατάστασης των πινάκων αυτών για $\epsilon \to 0$; Τι συμπεραίνετε για τα αντίστοιχα 2×2 γραμμικά συστήματα, όταν το ϵ είναι μικρό;

   Απάντηση. Έχουμε $\|A\|_\infty = 2\epsilon, \|B\|_\infty = 1 + \epsilon$ και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ 1/\epsilon & 1/\epsilon \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ -1/\epsilon^2 & 1/\epsilon \end{pmatrix}$$

   οπότε $\|A^{-1}\|_\infty = 2/\epsilon, \|B^{-1}\|_\infty = 1/\epsilon + 1/\epsilon^2$. Τότε, $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4$ ενώ $\kappa_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = (1 + 1/\epsilon)^2$.

5. (10 μον.) Θεωρούμε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1).$$

   Ποιός είναι ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμου που ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς;

   Απάντηση. Θέτοντας διαδοχικά $f(x) = 1, x, x^2$, λαμβάνουμε τις σχέσεις $w_0 + w_1 + w_2 = 4$, $-w_0 + w_2 = 0$, $w_0 + w_2 = \frac{16}{3}$ για τα βάρη w_0, w_1, w_2. Εύκολα προκύπτει ότι $w_0 = w_2 = \frac{8}{3}$ και $w_1 = -\frac{4}{3}$. Ο συγκεκριμένος κανόνας ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού τρία, αλλά όχι τέσσερα.

6. (14 μον.) Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής $p_2(x)$, βαθμού το πολύ δύο, που παρεμβάλλεται στις τιμές της συνάρτησης $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ στα σημεία $x_0 = 0, x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Δείξτε ότι για $\epsilon(x) = f(x) - p_2(x)$ ισχύει $\frac{1}{16e^2} \le \epsilon(x) \le \frac{1}{16}$.

   Απάντηση. Γράφουμε το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1)$ και υπολογίζουμε τους συντελεστές του από τις σχέσεις $p_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$. Έτσι, $a_0 = 0, a_1 = e^{-1}$ και $a_2 = \frac{1+e^{-2}}{2} - 2e^{-1}$. Για το σφάλμα της παρεμβολής έχουμε

$$\epsilon(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

   για κάποιο $\xi \in (0, 2)$. Έχουμε $f'''(x) = -e^{-x}$ άρα $e^{-2} \le |f'''(x)| \le 1$ για $x \in [0, 2]$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η συνάρτηση $|x(x-1)(x-2)|$ λαμβάνει μέγιστο στα σημεία $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ίσο με $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Οι ζητούμενες ανισότητες προκύπτουν από το συνδιασμό αυτών των δύο αποτελεσμάτων.

7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας. Πως θα υπολογίζατε με τον αποτελεσματικότερο τρόπο

   (α΄) (6 μον.) Τον αριθμό $\lambda = (A^{-1}b)^T c$, για δεδομένα $b, c \in \mathbb{R}^n$;

   (β΄) (8 μον.) Τη λύση $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ της εξίσωσης πινάκων $XA = B$, για δεδομένο $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$;

Απάντηση. Για τον υπολογισμό του αριθμού $\lambda = (A^{-1}b)^T c$ θέτουμε $x = A^{-1}b$, δηλαδή λύνουμε το σύστημα $Ax = b$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\lambda = x^T c$.

Έστω $x_1, \ldots, x_m$ οι γραμμές του πίνακα X και $b_1, \ldots, b_m$ οι γραμμές του πίνακα B. Προφανώς $x_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ για $i = 1, \ldots, m$. Η εξίσωση πινάκων $XA = B$, ισοδύναμα, $A^T X^T = B^T$, είναι ισοδύναμη με τη λύση των $n \times n$ γραμμικών συστημάτων $A^T x_i^T = b_i^T$, $i = 1, \ldots, m$. Επομένως υπολογίζουμε την ανάλυση LU του πίνακα A μία μόνο φορά και τη χρησιμοποιούμε για να λύσουμε αυτά τα m γραμμικά συστήματα για τις γραμμές του πίνακα X.