1. Έστω γ το θετικά προσανατολισμένο τρίγωνο με κορυφές $z=0$, $z=3i$ και $z=-4$. Δείξτε ότι $\left|\int_\gamma (e^z-\bar{z})\,dz\right| \le 60$.

   Απάντηση. Έχουμε
$$\left|\int_\gamma (e^z-\bar{z})\,dz\right| \le \int_\gamma |e^z-\bar{z}|\,dz \le \int_\gamma (|e^z|+|\bar{z}|)\,dz = \int_\gamma \left(e^{\operatorname{Re} z}+|z|\right)\,dz,$$
   και πάνω στην καμπύλη γ έχουμε $\operatorname{Re} z \le 0$ και $|z|\le 4$. Άρα,
$$\left|\int_\gamma (e^z-\bar{z})\,dz\right| \le \int_\gamma (e^0+4)\,dz = 5\int_\gamma dz = 5\cdot 12 = 60.$$

2. Λύστε την εξίσωση $\sin z = i$. Υπόδειξη: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

   Απάντηση. Έχουμε $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i$ αν και μόνο αν $e^{iz}-e^{-iz}=-2$. Γράφουμε $w=e^{iz}$ έτσι ώστε $w-\frac{1}{w}=-2$. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την $w^2+2w-1=0$, της οποίας οι λύσεις είναι $w=-1\pm\sqrt{2}$. Οι λύσεις της εξίσωσης $e^{iz}=-1+\sqrt{2}$ είναι $iz=\ln(-1+\sqrt{2})+i2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, δηλαδή $z=2k\pi - i\ln(-1+\sqrt{2})$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Οι λύσεις της εξίσωσης $e^{iz}=-1-\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})e^{i\pi}$ είναι $iz=\ln(1+\sqrt{2})+i(\pi+2k\pi)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, δηλαδή $z=(2k+1)\pi - i\ln(1+\sqrt{2})$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

3. Λύστε την εξίσωση $\sec z = 2i$. Υπόδειξη: $\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}$.

   Απάντηση. Έχουμε $\sec z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = 2i$ αν και μόνο αν $e^{iz}+e^{-iz}=-i$. Γράφουμε $w=e^{iz}$ έτσι ώστε $w+\frac{1}{w}=-i$. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την $w^2+iw+1=0$, της οποίας οι λύσεις είναι $w=i\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ (συμπληρώστε το τετράγωνο για να το δείτε). Οι λύσεις της εξίσωσης $e^{iz}=i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$ είναι $iz=\ln\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, δηλαδή $z=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Οι λύσεις της εξίσωσης $e^{iz}=i\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$ υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο.

4. Λύστε την εξίσωση $\cos z = \frac{1}{2}$. Υπόδειξη: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

   Απάντηση. Έχουμε $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $e^{iz}+e^{-iz}=1$. Γράφουμε $w=e^{iz}$ έτσι ώστε $w+\frac{1}{w}=1$. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την $w^2-w+1=0$, της οποίας οι λύσεις είναι $w=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (συμπληρώστε το τετράγωνο για να το δείτε). Οι λύσεις της εξίσωσης $e^{iz}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ είναι $iz=\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, δηλαδή $z=-\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Οι λύσεις της εξίσωσης $e^{iz}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=1\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$ είναι $iz=\ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, δηλαδή $z=\left(\frac{\pi}{3}-2k\pi\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

5. Βρείτε τα σημεία, αν υπάρχουν, στα οποία η $f(z)=(z^2-1)\bar{z}$ είναι παραγωγίσιμη.

   Απάντηση. Αν $z=x+iy$ τότε $f(z)=f(x+iy)=((x+iy)^2-1)\left(\overline{x+iy}\right)=u(x,y)+iv(x,y)$ με $u(x,y)=x^3+xy^2-x$ και $v(x,y)=y^3+x^2y+y$. Έχουμε $u_x=3x^2+y^2-1$ και $v_y=3y^2+x^2+1$, άρα $u_x=v_y$ αν και μόνο αν $x^2-y^2=1$. Ακόμα, $u_y=v_x=2xy$, άρα $u_y=-v_x$ αν και μόνο αν $x=0$ ή $y=0$. Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει $y^2=-1$, το οποίο είναι αδύνατον, ενώ στην δεύτερη περίπτωση θα πρέπει $x=\pm1$. Συνεπώς η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $z=\pm1$.

6. Έστω ότι η $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy–Riemann σε κάποιο σημείο $z_0=x_0+iy_0$. Δείξτε ότι η $f^2(z)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy–Riemann στο ίδιο σημείο.

   Απάντηση. Έχουμε $f^2(z)=(u+iv)^2=U(x,y)+iV(x,y)$ με $U(x,y)=u^2(x,y)-v^2(x,y)$ και $V(x,y)=2u(x,y)v(x.y)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $u_x=v_y$ και $u_y=-v_x$ έχουμε, $U_x=2uu_x-2vv_x$ και $V_y=2u_yv+2uv_y=-2v_xv+2uu_x=U_x$. Επιπλέον, $U_y=2uu_y-2vv_y$ και $V_x=2u_xv+2uv_x=2v_yv-2uu_y=-U_y$, άρα η $f^2(z)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy–Riemann.

7. Υπολογίστε το ολκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^z}{z^4-1}\,dz$ όπου γ είναι η κλειστή καμπύλη η οποία ξεκινάει από το $z=0$ διανύει τον κύκλο $|z+1|=1$ με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και στη συνέχεια τον κύκλο $|z-1|=1$ με φορά κατά την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.

   Απάντηση. Έστω γ_1 ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z+1|=1$ και γ_2 ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z-1|=1$. Προφανώς
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz - \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz.$$
   Για το ολοκλήρωμα στην καμπύλη γ_1 έχουμε
$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\, f(-1),$$
   όπου $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z^2+1)}$. Άρα, $\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = -\frac{\pi i}{2e}$. Για το ολοκλήρωμα στην καμπύλη γ_2 έχουμε
$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\, g(1),$$
   όπου $g(z) = \frac{e^z}{(z+1)(z^2+1)}$. Άρα, $\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \frac{\pi i e}{2}$ και τελικά
$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = -\frac{\pi i}{2e} - \frac{\pi i e}{2} = -\frac{\pi i}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right).$$

8. Το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{3z+5}{(z^2+1)^2}\,dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο i και ακτίνα 1 έχει την τιμή $\frac{5\pi}{2}$ γιατί
$$\int_\gamma \frac{3z+5}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{3z+5}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz = 2\pi i f'(i),$$
   όπου $f(z) = \frac{3z+5}{(z+i)^2}$. Έχουμε $f'(z) = \frac{3(z+i)-2(3z+5)}{(z+i)^3}$ άρα $f'(i) = \frac{5}{4i}$.

9. Το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3}\,dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο i και ακτίνα 1 έχει την τιμή $-\pi^3 i$.

10. Το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2+9)}\,dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2 έχει την τιμή 0.

11. Το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{z^2-4z+13}\,dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο i και ακτίνα 3 έχει την τιμή $\frac{\pi}{3}$ γιατί $z^2-4z+3 = (z-2)^2+9 = (z-2-3i)(z-2+3i)$ και μόνο το σημείο $2+3i$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $|z-i|=3$.

12. Το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\,dz$, όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 4 έχει την τιμή πi.

13. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την ανίσωση $|z-i| > |z+i|$ είναι το $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Πράγματι, με $z = x+iy$ έχουμε $|z-i|^2 > |z+i|^2$ αν και μόνο αν $x^2+(y-1)^2 > x^2+(y+1)^2$ δηλαδή αν και μόνο αν $y<0$.

14. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την ανίσωση $|z-1| < |z-i|$ είναι το $\{z : \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}$.

15. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την ανίσωση $|2z+1| < |z+1|$ είναι τα σημεία στο εσωτερικό του δίσκου με κέντρο το $-1/3$ και ακτίνα $1/3$.

16. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την ανίσωση $|z-1| < |2z+1|$ είναι τα σημεία στο εξωτερικό του δίσκου με κέντρο το -1 και ακτίνα 1.

17. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση $|z-i| = |\operatorname{Re} z|$ είναι το $\{z : \operatorname{Im} z = 1\}$.

18. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση $|z-1|^2 = |z+1|^2+6$ είναι το $\{z : \mathrm{Re}\, z = -3/2\}$.

19. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση $|z+1|^2 = |z-1|^2+6$ είναι το $\{z : \mathrm{Re}\, z = 3/2\}$.

20. Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση $|z+1|^2 + 2|z|^2 = |z-1|^2$ είναι ο κύκλος με κέντρο το -1 και ακτίνα 1.

21. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma z\, dz$ όπου γ είναι το ημικύκλιο από το i στο $-i$ που διέρχεται από το σημείο -1 είναι 0. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την παραμετρικοποίηση $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$, έχουμε
$$\int_\gamma z\, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{i\theta} i e^{i\theta}\, d\theta = i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{i2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[e^{i3\pi} - e^{i\pi}\right] = 0.$$

22. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma |z|^2\, dz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 2 στο $3+i$ είναι $\frac{20}{3} + \frac{20}{3}i$.

23. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma \frac{1}{z+4}\, dz$ όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο -4 και ακτίνα 2 είναι $2\pi i$.

24. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma \mathrm{Re}\, z\, dz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 1 στο i είναι $-1/2+i/2$. Πράγματι, παραμετρικοποιούμε το ευθύγραμμο τμήμα ως $\gamma(t) = 1\cdot(1-t)+ti$, $0 \le t \le 1$. Τότε Re, $\gamma(t) = 1-t$ και $\gamma'(t) = -1+i$, άρα $\int_\gamma \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_0^1 (1-t)(-1+i)\, dt = (-1+i)\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = (-1+i)\frac{1}{2}$.

25. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma \frac{1}{z+2}\, dz$ όπου γ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο -2 και ακτίνα 2 είναι $2\pi i$.

26. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma |z|^2\, dz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 3 στο $2+i$ είναι $-\frac{20}{3} + \frac{20}{3}i$.

27. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma \mathrm{Im}\, z\, dz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 1 στο $3+i$ είναι $1+i/2$.

28. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma \mathrm{Im}\, z\, dz$ όπου γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το i στο $2-3i$ είναι $-2+4i$.