Θέματα τελικής εξέτασης του μαθήματος "Γραμμικός και μη- Προγραμματισμός"-Ιούνιος 2005

Ν. Γ. Χρηστάκης

1. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση (αν υπάρχει) του προβλήματος:

$$\max\left(z(x) = -x_1 + 3x_2 + 3x_3\right)$$

με περιορισμούς:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3$$
$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

χωρίς τη χρήση μεθόδου Simplex, αλλά βρίσκοντας όλες τις βασικές λύσεις του.
(**2 μονάδες**)

2. Να λυθεί με την μέθοδο Simplex και τον αλγόριθμο μικρότερου tableau το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$\max\left(z(x) = 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4\right)$$

με περιορισμούς:

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Εάν υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις,να βρεθούν και αυτές. Να εξηγείτε με σαφήνεια τι κάνετε σε κάθε βήμα.
(**3 μονάδες**)

3. Έστω το παρακάτω πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$\max\left(z(x) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3\right)$$

με περιορισμούς:

$$3x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq 18$$
$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι z=4 στο $(\chi_1, \chi_2, \chi_3)=(1, 0, 0)$ και ο τελικός πίνακας Simplex είναι:

BM	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	$\underline{b}$
χ_4	0	-13	-12	1	0	-3	15
χ_5	0	5	6	0	1	2	14
χ_1	1	3	2	0	0	1	1
$\bar{c}_j$	0	9	2	0	0	4	4

(α) Διατυπώστε το δυϊκό του και βρείτε τη λύση του δυϊκού χωρίς τη χρήση μεθόδου Simplex (**1,5 μονάδα**)
(β) Βρείτε τη βέλτιστη λύση εάν αλλάξει ο όρος b_3 στον 3^o περιορισμό και αντί για 1 γίνει 5 (**1,5 μονάδα**)

4. Να επιλυθεί το πρόβλημα Κυρτού Τετραγωνικού Προγραμματισμού

$$\max\left(16x_1 + 16x_2 - x_1^2 - 4x_2^2\right)$$

όταν

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(**3 μονάδες**)

5. Να επιλυθεί το πρόβλημα Μη Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$\max\left(4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_3^2\right)$$
$$x_1, x_2, x_3 \in R$$

(**2 μονάδες**)

Σημείωση: Όσοι δεν επιθυμούν να κρατήσουν τον βαθμό της προόδου να λύσουν τα θέματα 1,2, 3, 4.
Όσοι επιθυμούν να κρατήσουν τον βαθμό της προόδου να λύσουν τα θέματα 2, 3, 4, 5.

Το άθροισμα των μονάδων και στις 2 περιπτώσεις είναι 11.

Γραμμικός και μη Προγραμματισμός
Ιούνιος 2005

1.
$$\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{με } \underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3$$
$$\Downarrow$$
$$r(A) = 2$$
$$\Downarrow$$
μπορώ να παραλείψω τελευταία εξίσωση
$$\Downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Έχω 2 μη μηδενικές λύσεις (αφού $r(A)=2$)

1η Περίπτωση

$x_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 + 3x_2 &= 0 \\ 5x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= 3 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \text{όχι Β.Ε. λύση}$$

2η Περίπτωση

$x_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 3/2 \\ x_3 &= -1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{όχι Β.Ε. λύση}$$

3η Περίπτωση

$x_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{όχι Β.Ε. λύση}$$

$\Rightarrow$ Το πρόβλημα αυτό δεν έχει Βασικές Εφικτές λύσεις $\Rightarrow$ η εφικτή περιοχή είναι το κενό σύνολο

2. $\max (3x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4)$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_6 &= 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + x_7 &= 3 \end{aligned}$$

$r(A) = 3$

BM	x_1	x_2	x_3	$\downarrow x_4$	θ
x_5	2	4	-1	1	8
x_6	1	1	2	-3	10
$\leftarrow x_7$	1	-1	4	1	3
$\bar{c}_j$	-3	4	1	-4	0

$\Downarrow$

2ος Simplex

BM	x_1	x_2	x_3	x_7	θ
x_5	1	5	-5	-1	5
x_6	4	-2	14	3	19
x_4	1	-1	4	1	3
$\bar{c}_j$	1	0	17	4	12

Αφού $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ η βέλτιστη λύση είναι

$\underline{x}_{opt_1} = [0, 0, 0, 3, 5, 19, 0]$ με

$z_{max} = 12$

Παρατηρώ όμως ότι $\bar{c}_2 = 0$ (όπου x_2 μη βασική μεταβλητή) $\Rightarrow \exists$ εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

$\Downarrow$

x_2 : εισερχόμενη και x_5 : εξερχόμενη

$\Downarrow$

ΒΜ	x_1	x_5	x_3	x_7	b
x_2	$1/5$	$1/5$	-1	$-1/5$	1
x_6					21
x_4					4
$\bar{c}_j$	1	0	17	4	12

$\Downarrow$

$\underline{x}_{opt_2} = [0, 1, 0, 4, 0, 21, 0]$ με $z_{max} = 12$

$\Downarrow$

$\underline{x}_{opt} = \lambda \underline{x}_{opt_1} + (1-\lambda)\underline{x}_{opt_2}$

όπου $0 \leq \lambda \leq 1$

3.

α) $\max(4x_1 + 3x_2 + 6x_3)$

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 4x_2 - 6x_3 &\leq 18 \\
-2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\
\underline{x} \geq 0 &
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

Δυϊκό πρόβλημα

$\min(18w_1 + 12w_2 + w_3)$

$$
\begin{aligned}
3w_1 - 2w_2 + w_3 &\geq 4 \\
-4w_1 - w_2 + 3w_3 &\geq 3 \\
-6w_1 + 2w_2 + 2w_3 &\geq 6 \\
w_1, w_2, w_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Αφού η βέλτιστη λύση είναι για $\hat{x}_1 = 1$, $\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = 0$
$Z_{max} = 4$, τότε για το δυϊκό έχω ότι

$3\hat{w}_1 - 2\hat{w}_2 + \hat{w}_3 = 4$ (από 1η ανίσωση)
$18\hat{w}_1 + 12\hat{w}_2 + \hat{w}_3 = 4$ (από αντικειμενική συνάρτηση)

Βλέπω ότι έχω 2 εξισώσεις με 3 αγνώστους. Πρέπει να κάνω υπολογισμούς για το αν τα $\hat{w}_1$, $\hat{w}_2$, $\hat{w}_3$ είναι θετικά ή μηδέν.

<u>Όμως:</u>

Εάν από 2η εξίσωση αφαιρέσω την 1η (για να διώξω εξάρτηση από $\hat{w}_3$) έχω ότι

$$15\hat{w}_1 + 14\hat{w}_2 = 0$$

και αφού $\hat{w}_1, \hat{w}_2 \geq 0 \Rightarrow \nexists\ \hat{w}_1, \hat{w}_2 > 0$:
να ισχύει η ισο ισότητα σχέση $\Rightarrow \hat{w}_1 = \hat{w}_2 = 0$
και $\Rightarrow \hat{w}_3 = 4$
με
min τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $= 4$

β) Εάν το b_3 γίνει 5. Τότε: από αναθεωρημένη μέθοδο Simplex
$B, N, \underline{c}_B, \underline{c}_N$: μένουν ίδια
$\underline{b}$: αλλάζει
$\} \Rightarrow$ αλλάζει μόνο το $\underline{b}_{\text{νέου Simplex}}$ και το $\bar{Z}_{\text{νέου Simplex}}$

θεωρώντας φυσικά ότι οι ΒΜ δεν αλλάζουν. Έτσι, αφού:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{b} = [18, 12, 5]^T$$

$$\underline{b}_{\text{νέου Simplex}} = B^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_4 \\ \leftarrow x_5 \\ \leftarrow x_1 \end{matrix} > 0$$

$$\Downarrow$$

Η νέα βέλτιστη λύση είναι η:

$$\underline{x}_{opt} = [5, 0, 0, 3, 22, 0] \quad \text{με}$$

$$\bar{Z}_{max} = \underline{c}_B^T B^{-1} \cdot \underline{b} = [0, 0, 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix} = 20$$

4.

$$\max\left(16x_1 + 16x_2 - x_1^2 - 4x_2^2\right)$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Πρόβλημα Κ.Τ.Π. με

$$\underline{c} = [16, 16]^T, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A = [1, 2], \quad \underline{b} = [4] \quad \underline{x} = [x_1, x_2]^T, \quad \underline{\mu} = [\mu_1]$$
$$\underline{y} = [y_1, y_2] \text{ και } \underline{\lambda} = [\lambda_1]$$

Θα εφαρμόσω τροποποιημένη μέθοδο Simplex στο πρόβλημα

$$-2D\underline{x} + A^T\underline{\mu} - \underline{y} = \underline{c}$$

$$A\underline{x} + \underline{\lambda} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \ge 0, \ \underline{y} \ge 0, \ \underline{\mu} \ge 0, \ \underline{\lambda} \ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + \mu_1 - y_1 &= 16 \\ 8x_2 + 2\mu_1 - y_2 &= 16 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda_1 &= 4 \end{aligned}$$
$$x_1 \cdot y_1 = x_2 y_2 = 0 = \mu_1 \cdot \lambda_1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, \mu_1, \lambda_1 \ge 0$$

Εισαγωγή 2 τεχνητών μεταβλητών t_1, t_2 και επίλυση με μέθοδο μεγάλου M, όπου $M >> 0$

$$\max(-Mt_1 - Mt_2)$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad + \mu_1 - y_1 \quad\quad + t_1 &= 16\\
8x_2 + 2\mu_1 \quad - y_2 \quad\quad + t_2 &= 16\\
x_1 + 2x_2 \quad\quad + \lambda_1 &= 4\\
x_1, x_2, y_1, y_2, \mu_1, \lambda_1, t_1, t_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

BM	x_1	x_2 ↓	μ_1	y_1	y_2	λ_1	t_1	t_2	θ
t_1	2	0	1	-1	0	0	1	0	16
← t_2	0	8	2	0	-1	0	0	1	16
λ_1	1	2	0	0	0	1	0	0	4
$\bar{c}_j$	-2M	-8M	$\cancel{-3M}$	+M	+M	0	0	0	-32M

Το μ_1 δεν μπορεί να μπει στη βάση λόγω λ_1

BM	x_1 ↓	x_2	μ_1	y_1	y_2	λ_1	t_1	t_2	θ
t_1	2	0	1	-1	0	0	1	0	16
x_2	0	1	1/4	0	-1/8	0	0	1/8	2
← λ_1	1	0	-1/2	0	1/4	1	0	-1/4	0
$\bar{c}_j$	-2M	0	$\cancel{-M}$	M	$\cancel{0}$	0	0	M	-16M

⇓

εκφυλισμένη λύση

⇓

BM	x_1	x_2	μ_1 ↓	y_1	y_2	λ_1	t_1	t_2	θ
← t_1	0	0	2	-1	-1/2	-2	1	1/2	16
x_2	0	1	1/4	0	-1/8	0	0	1/8	2
x_1	1	0	-1/2	0	1/4	1	0	1/4	0
$\bar{c}_j$	0	0	-2M	$\cancel{M}$	$\cancel{1/2M}$	2M	0	1/2M	-16M

⇓

Ελάχιστο πηλίκο και στη γραμμή του t_1 και στη γραμμή του x_2 ΑΛΛΑ με το t_1 διώχνω την τεχνητή μεταβλητή t_1

BM	x_1	x_2	μ_1	y_1	y_2	λ_1	t_1	t_2	b
μ_1	0	0	1	$-1/2$	$-1/4$	-1	$1/2$	$1/4$	8
x_2									0
x_1									4
$\bar{c}_j$	0	0	0	0	0	0	M	M	0

$\Rightarrow$ Βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, \lambda_1, y_1, y_2, \mu_1) = (4, 0, 8, 0, 0, 0)$

$\Downarrow$

Λύση : $(x_1^*, x_2^*) = (4, 0) \Rightarrow \max z = 48$

5. $$\max_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \left(4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_2^2 - 2x_3^2\right)$$

$$\nabla f(\underline{x}) = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 4 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 6 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= -4x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

πιθανό μέγιστο $\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ ιδιοτιμές του $Hf(x)$:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -6 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases} < 0 \Rightarrow$$ αρνητικά ορισμένος

$\Rightarrow$ το $\underline{x}^*$ είναι και ολικό μέγιστο επειδή η αντικειμενική συνάρτηση είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και η εφικτή περιοχή (δηλ. το $\mathbb{R}^3$) είναι κυρτή