Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16 **Διδάσκων: Μενέλαος Καραβέλας**

ΜΕΜ103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τμήμα Α

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

Τρίτη, 01/12/15 - Τετάρτη, 02/12/15

Άσκηση 6.1 Δείξτε ότι το πηλίκο της διαίρεσης του $m + m'$ με το n είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το άθροισμα των πηλίκων του m και m' με το n. Πιο συγκεκριμένα, δείξτε ότι εάν $m, m', n \in \mathbb{N}$ και $q, q', q'', r, r', r'' \in \mathbb{N}_0$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $m = qn + r$, $m' = q'n + r'$, $(m + m') = q''n + r''$ και $r < n$, $r' < n$, $r'' < n$, τότε $q + q' \leq q'' \leq q + q' + 1$.

Άσκηση 6.2 Δείξτε ότι το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$ διαιρεί το γινόμενο $(m + 1) \cdot (m + 2) \cdot ... \cdot (m + k)$, για κάθε k και $m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6.3 Ορίζουμε αναδρομικά το $n!$ με $0! = 1$ και $(n + 1)! = n!(n + 1)$.

α′. Δείξτε ότι $(n - r)!\, r!$ διαιρεί το $n!$ για όλα τα r με $0 \leq r \leq n$.

β′. Από το α′) έχουμε ότι $\dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$ είναι φυσικός αριθμός. Τον ονομάζουμε *διωνυμικό συντελεστή* και τον συμβολίζουμε $\dbinom{n}{k}$. Δείξτε ότι:

(i) $\dbinom{n}{0} = 1$

(ii) $\dbinom{n}{1} = n$

(iii) $\dbinom{n}{r} = \dbinom{n}{n-r}$

γ′. Δείξτε ότι $\dbinom{n}{r} + \dbinom{n}{r-1} = \dbinom{n+1}{r}$.

δ′. Δείξτε με επαγωγή ότι οι διωνυμικοί συντελεστές είναι ακριβώς οι συντελεστές στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(a + n)^n$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Άσκηση 6.4 Υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 2244 και 2145,

α′. χρησιμοποιώντας τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο.

β′. παραγοντοποιώντας του δύο αριθμούς σε πρώτους παράγοντες.

Άσκηση 6.5 Δείξτε ότι, εάν p, q και n είναι φυσικοί αριθμοί, τότε $p^n | q^n$ εάν και μόνο εάν $p | q$.