

**MEM103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ****Τμήμα Α****Εργαστήριο Προβλημάτων 4**

Τρίτη, 10/11/15 - Τετάρτη, 18/11/15

**Άσκηση 4.1** Έστω ότι  $P$  συμβολίζει την πρόταση 'Η ύλη είναι ενδιαφέρουσα',  $Q$  συμβολίζει την πρόταση 'Οι ασκήσεις είναι δύσκολες' και  $R$  συμβολίζει την πρόταση 'Το μάθημα είναι ευχάριστο'. Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις σε συμβολική μορφή.

- α'. Η ύλη είναι ενδιαφέρουσα και οι ασκήσεις είναι δύσκολες.
- β'. Εάν η ύλη δεν είναι ενδιαφέρουσα και οι ασκήσεις δεν είναι δύσκολες, τότε το μάθημα δεν είναι ευχάριστο.
- γ'. Το ότι η ύλη είναι ενδιαφέρουσα σημαίνει ότι οι ασκήσεις είναι δύσκολες, και το αντίστροφο.
- δ'. Είτε η ύλη είναι ενδιαφέρουσα είτε οι ασκήσεις δεν είναι δύσκολες, αλλά όχι και τα δύο.

**Άσκηση 4.2**

- Γράψτε μια σύνθετη πρόταση η οποία να είναι αληθής όταν ακριβώς δύο από τις τρεις προτάσεις  $P$ ,  $Q$  και  $R$  είναι αληθείς.
- Γράψτε μια σύνθετη πρόταση η οποία να είναι αληθής, όταν καμία ή μία ή δύο από τις προτάσεις  $P$ ,  $Q$  και  $R$  είναι αληθείς.

**Άσκηση 4.3** Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας για τις παρακάτω προτάσεις:

- α'.  $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$
- β'.  $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
- γ'.  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

**Άσκηση 4.4** Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και εξετάστε εάν είναι αληθείς

- α'. Για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , υπάρχει πραγματικός αριθμός  $y$ , τέτοιος ώστε  $y^3 = x$ .
- β'. Υπάρχει πραγματικός αριθμός  $y$ , τέτοιος ώστε, για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , το  $x + y$  είναι θετικό.
- γ'. Για κάθε άρρητο αριθμό  $x$ , υπάρχει ακέραιος  $n$  τέτοιος ώστε  $x < n < x + 1$ .
- δ'. Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 όταν διαιρεθεί με το 4.

ε'. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πρώτων αριθμών διαφορετικών από το 2 είναι άρτιος αριθμός.

**Άσκηση 4.5** Γράψτε την άρνηση κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις:

$$\alpha'. \forall x : (P(x) \vee Q(x))$$

$$\beta'. \exists x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\gamma'. \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x \geq y)$$

$$\delta'. \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : (x + y \geq z)$$

**Άσκηση 4.6** Σχηματίστε τους πίνακες αληθείας των παρακάτω προτάσεων και εξετάστε ποιες από αυτές είναι ταυτολογίες.

$$\alpha'. P \Rightarrow (\neg P)$$

$$\beta'. (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$$

$$\gamma'. (P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$\delta'. (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P) \vee (\neg Q)$$

**Άσκηση 4.7** Σχηματίστε τους πίνακες αληθείας των παρακάτω ζευγών προτάσεων και εξετάστε εάν οι δύο προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες.

$$\alpha'. \neg(P \wedge Q) \quad , \quad (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\beta'. \neg(P \vee Q) \quad , \quad (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$$\gamma'. \neg(P \wedge (\neg P)) \quad , \quad P \vee (\neg P)$$

$$\delta'. P \Rightarrow R \quad , \quad (\neg P) \wedge R$$

$$\epsilon'. P \Rightarrow R \quad , \quad (\neg R) \wedge P$$

$$\sigma\tau'. (P \Rightarrow Q) \wedge R \quad , \quad P \Rightarrow (Q \wedge R)$$

$$\zeta'. (P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (R \wedge (\neg R)) \quad , \quad P \Rightarrow Q$$