

MEM103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τμήμα Α

Εργαστήριο Προβλημάτων 3

Τρίτη, 27/10/15 - Παρασκευή, 30/10/15

Άσκηση 3.1 Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το \mathbb{R} , και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του \mathbb{R} . Βρείτε σε κάθε περίπτωση πιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού.

α'. $h(x) = \log x$

β'. $\alpha(v) = -v$

γ'. $j(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - 1}$

δ'. $g(u) = \log \log \cos u$

Άσκηση 3.2 Προσδιορίστε την εικόνα για τις ακόλουθες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α'. $f(x) = x^3$

β'. $f(x) = x - 4$

γ'. $f(x) = e^x + 3$

δ'. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{εάν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Άσκηση 3.3 Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ που να είναι:

α'. ούτε ενεικονική, ούτε επεικονική,

β'. ενεικονική, αλλά όχι επεικονική,

γ'. επεικονική, αλλά όχι ενεικονική,

δ'. ενεικονική και επεικονική.

Προσέξτε ότι η εικόνα της f πρέπει να περιέχεται στο \mathbb{Z} .

Άσκηση 3.4 Δίδονται συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$. Δείξτε ότι:

α'. Εάν η $g \circ f$ είναι επεικονική, τότε η g είναι επεικονική.β'. Εάν η $g \circ f$ είναι ενεικονική, τότε η f είναι ενεικονική.

γ'. Βρείτε παραδείγματα συναρτήσεων f και g για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές, δηλαδή ότι εάν η g είναι επεικονική ή εάν η f είναι ενεικονική, δεν ισχύει υποχρεωτικά το ίδιο για τη σύνθεση $g \circ f$.

Άσκηση 3.5 Εάν $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ είναι αμφιμονοσήμαντες, δείξτε ότι η $g \circ f : A \rightarrow C$ αμφιμονοσήμαντη.

Άσκηση 3.6 Εάν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{a, b, c\}$, πόσες διαφορετικές συναρτήσεις υπάρχουν από το A στο B ; Πόσες από το B στο A ; Πόσες σε κάθε περίπτωση είναι ενεικονικές; Πόσες είναι επεικονικές; Πόσες είναι αμφιμονοσήμαντες;

Άσκηση 3.7 Έστω οι συναρτήσεις:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x + 2$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad g(x) = x^2.$$

Βρείτε τα σύνολα $f([-1, 1])$, $f^{-1}([0, 2])$, $g([-3, -2])$ και $g^{-1}([2, 4])$.

Άσκηση 3.8 Βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy}{(x-1)y}.$$

Άσκηση 3.9 Βρείτε την ένωση και την τομή των παρακάτω οικογενειών συνόλων με σύνολο δεικτών A .

$$\alpha'. A = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad S_a = [0, a + 1].$$

$$\beta'. A = \mathbb{N} \quad S_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{n}\right\}.$$

Άσκηση 3.10 Ορίζουμε τις διμελείς πράξεις στο \mathbb{Z} :

$$\alpha'. x \circ y = x - y$$

$$\beta'. x \circ y = |x - y|$$

$$\gamma'. x \circ y = x + y + xy$$

$$\delta'. x \circ y = \frac{1}{2} \left(x + y + \frac{1}{2}((-1)^{x+y} + 1) + 1 \right).$$

Επαληθεύστε ότι είναι διμελείς πράξεις στο \mathbb{Z} , δηλαδή συναρτήσεις $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Σε κάθε περίπτωση ελέγξτε εάν η πράξη είναι μεταθετική και προσεταιριστική.