

MEM103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**Τμήμα Α****Εργαστήριο Προβλημάτων 1**

Τρίτη, 13/10/15 - Τετάρτη, 14/10/15

Άσκηση 1.1 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.

α'. $1 \in \{1, 2\}$

στ'. $2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

β'. $3 \in \{1, 5, 2, 3\}$

ζ'. $\{1, 4, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 4, 3, 2\}$

γ'. $3 \in \{1, 5, 2\}$

η'. $\{a, b, d, d\} = \{a, b, d\}$

δ'. $\{1, 3\} \in \{1, 3, 5, 2\}$

θ'. $\{a, b, d, d\} = \{a, b, a, d\}$

ε'. $\{5\} \in \{1, 3, 5, 2\}$

ι'. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$

Άσκηση 1.2 Προσδιορίστε τα παρακάτω σύνολα:

α'. $\{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 6\}$

β'. $\{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 6\}$

γ'. $A \cup B$, όπου $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$ και $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq -3\}$

δ'. $C \cap D$, όπου $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -3\}$ και $D = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 3\}$

Άσκηση 1.3 Εάν A και B είναι σύνολα, οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

α'. $A \subseteq B$

β'. $A \cap B = A$

γ'. $A \cup B = B$

Άσκηση 1.4 Απλοποιήστε τις ακόλουθες εκφράσεις:

α'. $(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F)$

β'. $((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c$

Άσκηση 1.5 Δείξτε ότι για οποιαδήποτε υποσύνολα A και B του χώρου U , ισχύει η ισότητα $A \setminus B = A \cap B^c$, και χρησιμοποιήστε την για να δείξετε ότι:

$$\alpha'. (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$\beta'. (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

Άσκηση 1.6 Εάν S είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του \mathbb{Z} στα οποία ανήκει το 0, βρείτε τα:

$$\bigcup S \quad \text{και} \quad \bigcap S.$$

Άσκηση 1.7 Αποδείξτε ότι

$$(A \Delta B) \Delta A = B$$

Άσκηση 1.8 Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να δείξετε ότι εάν A, B και C είναι (οποιαδήποτε) σύνολα και $A \Delta B = A \Delta C$ τότε $B = C$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $A \Delta X = B$ έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 1.9 Εάν $A = \{a, b, \{a, c\}, \emptyset\}$, βρείτε τα σύνολα:

$$\alpha'. A \setminus \{a\}$$

$$\delta'. A \setminus \{\{a, c\}\}$$

$$\beta'. A \setminus \emptyset$$

$$\epsilon'. A \Delta \{a, c\}$$

$$\gamma'. A \setminus \{a, c\}$$

$$\sigma'. \{a\} \setminus A$$

Άσκηση 1.10 Εάν $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{a, \{a\}, b\}$, προσδιορίστε για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις εάν είναι αληθής ή ψευδής:

$$\alpha'. \emptyset \in \mathfrak{P}(A)$$

$$\epsilon'. \{\{a\}\} \in \mathfrak{P}(B)$$

$$\beta'. \emptyset \subseteq \mathfrak{P}(A)$$

$$\sigma'. \{\{a\}\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$$

$$\gamma'. \{\emptyset\} \in \mathfrak{P}(A)$$

$$\zeta'. \{\{a\}, b\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$$

$$\delta'. \{\emptyset\} \subseteq \mathfrak{P}(A)$$

$$\eta'. \{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$$

Άσκηση 1.11 Δίνεται ένα σύνολο X , ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ και $Z = X \cup \mathfrak{P}(X)$. Δείξτε ότι:

$$A \subseteq Z \quad \text{και} \quad A \in Z.$$