Minimum Spanning Tree

Γενικά σημεία για μελέτη

- Minimum Spanning Trees (§7.3)
  - Ορισμοί
  - Ένα σημαντικό γεγονός
- Αλγόριθμος των Prim-Jarnik's (§7.3.2)
- Ο αλγόριθμος του Kruskal (§7.3.1)

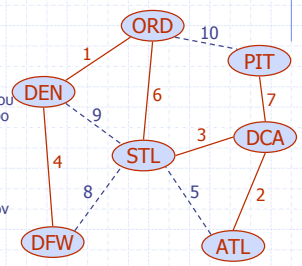
Minimum Spanning Tree

Spanning υπογράφος
- Ένας υπογράφος του G που περιέχει όλους τους κόμβους του G

Spanning δέντρο
- Ένας Spanning υπογράφος που είναι από μόνος του (ελεύθερο) δέντρο

Minimum spanning tree (MST)
- Το Spanning δέντρο ενός ζυγισμένου γράφου με το ελάχιστο άθροισμα βαρών των ακμών

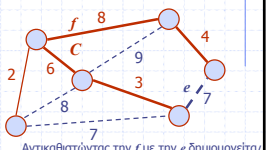
- Εφαρμογές
  - Δίκτυα επικοινωνιών
  - Μεταφορικά δίκτυα



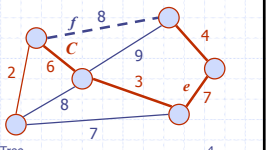
Ιδιότητα Κύκλου

Ιδιότητα Κύκλου:
- Έστω T το ελάχιστο spanning δέντρο ενός ζυγισμένου γράφου G
- Έστω e μια ακμή του G η οποία δεν ανήκει στο T και C είναι ο κύκλος που σχηματίζεται από την e μαζί με το T
- Για κάθε ακμή f του C, $weight(f) \leq weight(e)$

Απόδειξη:
- Εις άτοπον απαγωγή
- Αν $weight(f) > weight(e)$ μπορούμε να έχουμε ένα spanning δέντρο μικρότερου βάρους αντικαθιστώντας την e με την f



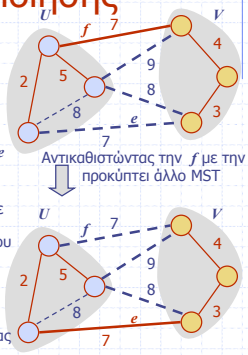
Αντικαθιστώντας την f με την e δημιουργείται ένα καλύτερο spanning δέντρο



Ιδιότητα τμηματοποίησης

Ιδιότητα τμηματοποίησης:
- Θεωρείστε ένα τμήμα των κόμβων του G μέσα στα υποσύνολα U και V
- Έστω e είναι μια ακμή ελάχιστου βάρους κατά μήκος του τμήματος
- Υπάρχει ένα ελάχιστο spanning δέντρο του G που περιέχει την ακμή e

Απόδειξη:
- Έστω T ένα MST του G
- ΑΝ το T δεν περιέχει την e,θεωρείστε τον κύκλο C που σχηματίζεται από την e με το T και έστω f μια ακμή του C κατά μήκος του τμήματος
- Από την κυκλική ιδιότητα, $weight(f) \leq weight(e)$
- Επομένως, $weight(f) = weight(e)$
- Παίρνουμε άλλο MST αντικαθιστώντας την f με την e



Ο αλγόριθμος των Prim-Jarnik's

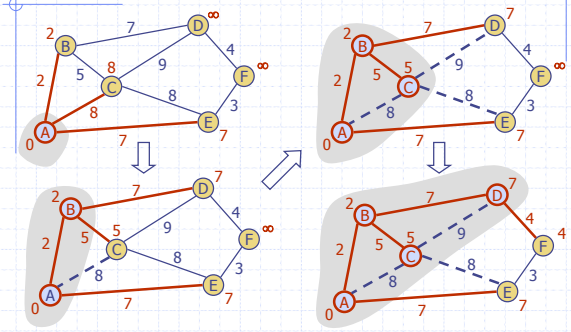
- Ο αλγόριθμος των Prim-Jarnik's για τον υπολογισμό ενός MST είναι παρόμοιος με τον αλγόριθμο του Dijkstra
- Θεωρούμε ότι ο γράφος είναι συνδεδεμένος
- Διαλέγουμε έναν τυχαίο κόμβο s και δημιουργούμε το MST σαν ένα σύννεφο από κόμβους, αρχίζοντας από τον s
- Μαζί με κάθε κόμβο v αποθηκεύουμε και μια ετικέτα $d(v)$ που αναπαριστά το μικρότερο βάρος μιας ακμής που συνδέει τον v με έναν κόμβο στο σύννεφο
- Σε κάθε βήμα
  - Αποθηκεύουμε στο σύννεφο τον κόμβο u με την μικρότερη τιμή της ετικέτας απόστασης
  - Ανανεώνουμε τις ετικέτες των κόμβων που είναι προσκείμενες στον u

Ο αλγόριθμος των Prim-Jarnik (συν.)

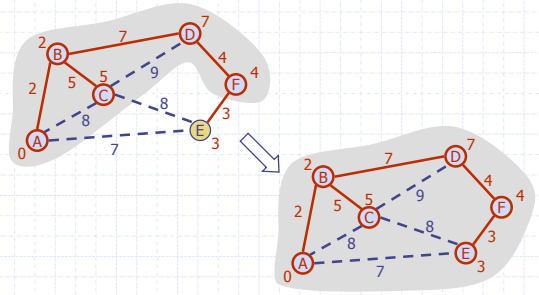
- Μια ουρά προτεραιότητας αποθηκεύει τους κόμβους έξω από το σύννεφο
  - Key: απόσταση
  - Element: κόμβος
- Locator-based μέθοδοι
  - $insert(k,e)$ επιστρέφει έναν locator
  - $replaceKey(l,k)$ αλλάζει το κλειδί ενός αντικειμένου
- Αποθηκεύουμε τρεις ετικέτες με κάθε κόμβο:
  - Απόσταση
  - Την ακμή πατέρα σε ένα MST
  - Τον Locator σε μια ουρά προτεραιότητας

```
Algorithm PrimJarnikMST(G)
  Q ← new heap-based priority queue
  s ← a vertex of G
  for all v ∈ G.vertices()
    if v = s
      setDistance(v, 0)
    else
      setDistance(v, ∞)
    setParent(v, ∅)
    l ← Q.insert(getDistance(v), v)
    setLocator(v,l)
  while ¬Q.isEmpty()
    u ← Q.removeMin()
    for all e ∈ G.incidentEdges(u)
      z ← G.opposite(u,e)
      r ← weight(e)
      if r < getDistance(z)
        setDistance(z,r)
        setParent(z,e)
        Q.replaceKey(getLocator(z),r)
```


Παράδειγμα



Παράδειγμα (συν.)



Ανάλυση

- Λειτουργίες του γράφου
  - Η μέθοδος incidentEdges καλείται μια φορά για κάθε κόμβο
- Λειτουργίες ετικετών
  - Θέτουμε/ανακτούμε τις ετικέτες απόστασης,πατέρα και locator του κόμβου z $O(\deg(z))$ φορές
  - Ανάθεση/ανάκτηση μιας ετικέτας παίρνει χρόνο $O(1)$
- Λειτουργίες ουρών προτεραιότητας
  - Κάθε κόμβος εισάγεται και απομακρύνεται μια φορά από την ουρά προτεραιότητας, όπου κάθε εισαγωγή και απομάκρυνση παίρνει χρόνο $O(\log n)$
  - Το κλειδί ενός κόμβου w σε μια ουρά προτεραιότητας τροποποιείται το πολύ $\deg(w)$ φορές, όπου κάθε αλλαγή κλειδιού παίρνει χρόνο $O(\log n)$
- Ο αλγόριθμος των Prim-Jarnik τρέχει σε χρόνο $O((n + m) \log n)$ δεδομένου ότι ο γράφος αναπαρίσταται με μια δομή adjacency λίστας
- Θυμηθείτε ότι $\Sigma_v \deg(v) = 2m$
- Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(m \log n)$ δεδομένου ότι ο γράφος είναι συνδεδεμένος

Dijkstra vs. Prim-Jarnik

```
Algorithm DijkstraShortestPaths(G, s)
  Q ← new heap-based priority queue
  for all v ∈ G.vertices()
    if v = s
      setDistance(v, 0)
    else
      setDistance(v, ∞)
    setParent(v, ∅)
    l ← Q.insert(getDistance(v), v)
    setLocator(v,l)
  while ¬Q.isEmpty()
    u ← Q.removeMin()
    for all e ∈ G.incidentEdges(u)
      z ← G.opposite(u,e)
      r ← getDistance(u) + weight(e)
      if r < getDistance(z)
        setDistance(z,r)
        setParent(z,e)
        Q.replaceKey(getLocator(z),r)
```

```
Algorithm PrimJarnikMST(G)
  Q ← new heap-based priority queue
  s ← a vertex of G
  for all v ∈ G.vertices()
    if v = s
      setDistance(v, 0)
    else
      setDistance(v, ∞)
    setParent(v, ∅)
    l ← Q.insert(getDistance(v), v)
    setLocator(v,l)
  while ¬Q.isEmpty()
    u ← Q.removeMin()
    for all e ∈ G.incidentEdges(u)
      z ← G.opposite(u,e)
      r ← weight(e)
      if r < getDistance(z)
        setDistance(z,r)
        setParent(z,e)
        Q.replaceKey(getLocator(z),r)
```


Ο αλγόριθμος του Kruskal

- Μια ουρά προτεραιότητας αποθηκεύει τις ακμές έξω από το σύννεφο
  - Key: βάρος
  - Element: ακμή
- Στο τέλος του αλγόριθμου
  - Μένουμε με ένα σύννεφο που περιγράφει το MST
  - Ένα δέντρο T το οποίο είναι το MST

```
Algorithm KruskalMST(G)
  for each vertex V in G do
    define a Cloud(v) of ← {v}
  let Q be a priority queue.
  Insert all edges into Q using their
  weights as the key
  T ← ∅
  while T has fewer than n-1 edges do
    edge e = T.removeMin()
    Let u, v be the endpoints of e
    if Cloud(v) ≠ Cloud(u) then
      Add edge e to T
      Merge Cloud(v) and Cloud(u)
  return T
```