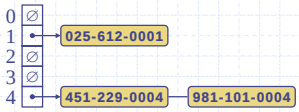
Πίνακες Κατακερματισμού



Περιγραφή και Υλικό Ανάγνωσης

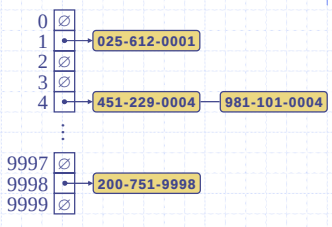
- Συναρτήσεις κατακερματισμού και πίνακες κατακερματισμού (§2.5.2)
- Λεπτομέρειες συνάρτησης κατακερματισμού
  - Hash code map (§2.5.3)
  - Compression map (§2.5.4)
- Χειρισμός συγκρούσεων (§2.5.5)
  - Chaining
  - Linear probing
  - Double hashing

Συναρτήσεις Κατακερματισμού και Πίνακες Καταρκεματισμού

- Μια συνάρτηση κατακερματισμού (hash function) h απεικονίζει κλειδιά ενός δοσμένου τύπο σε ακεραίους ενός σταθερού διαστήματος $[0, N-1]$
- Παράδειγμα: $h(x) = x \bmod N$ είναι μια συνάρτηση κατακερματισμού για ακέραια κλειδιά
- Ο ακέραιος $h(x)$ ονομάζεται τιμή κατακερματισμού (hash value) του κλειδιού x
- Ο σκοπός μιας συνάρτησης κατακερματισμού είναι η ομοιόμορφη διασπορά κλειδιών στο πεδίο $[0, N-1]$
- Ένας πίνακας κατακερματισμού (hash table) για ένα δοσμένο τύπο κλειδιών αποτελείται από
  - Μία συνάρτηση κατακερματισμού h
  - Ένα πίνακα μεγέθους N
- Όταν υλοποιούμε ένα λεξικό με ένα πίνακα κατακερματισμού, ο στόχος είναι να αποθηκεύσουμε το αντικείμενο (k, o) στη θέση $i = h(k)$
- Μια σύγκρουση (collision) συμβαίνει όταν δύο κλειδιά του λεξικού έχουν την ίδια τιμή κατακερματισμού
- Σχήματα χειρισμού συγκρούσεων:
  - Chaining: τα συγκρουόμενα αντικείμενα αποθηκεύονται σε ακολουθία
  - Open addressing: τα συγκρουόμενα αντικείμενα τοποθετούνται σε διαφορετικά κελιά του πίνακα

Παράδειγμα

- Σχεδιάζουμε ένα πίνακα κατακερματισμού για ένα λεξικό που αποθη-κεύει αντικείμενα (SSN, Name), όπου SSN (social security number) είναι ένας εννιαψήφιος θετικός ακέραιος
- Ο πίνακας κατακερματι-σμού χρησιμοποιεί ένα πίνακα μεγέθους $N = 10,000$ και η συνάρτηση κατακερματισμού είναι η $h(x) =$ last four digits of x
- Χρησιμοποιούμε chaining για να χειριστούμε τις συγκρούσεις



Συναρτήσεις Κατακερματισμού

- Μια συνάρτηση κατακερματισμού συνήθως καθορίζεται ως μια σύνθεση δύο συναρτήσεων :
  - Hash code map: h_1: keys → integers
  - Compression map: h_2: integers → $[0, N-1]$
- Η hash code map εφαρμόζεται πρώτα, και η compression map εφαρμόζεται αργότερα στο αποτέλεσμα, π.χ., $h(x) = h_2(h_1(x))$
- Ο στόχος της συνάρτησης κατακερματισμού είναι να "διασκορπίσει" τα κλειδιά με ένα φαινομενικά τυχαίο τρόπο

Hash Code Maps

- Memory address:
  - Επαναερμηνεύουμε τη διεύθυνση μνήμης του key object σαν ακέραιο (προκαθορισμένος hash code για όλα τα αντικείμενα Java)
  - Γενικά καλό, εκτός από αριθμητικά και αλφαριθμη-τικά κλειδιά
- Integer cast:
  - Επαναερμηνεύουμε τα bits του κλειδιού σαν ακέραιο
  - Κατάλληλο για κλειδιά μήκους μικρότερου ή ίσου του αριθμού των bits του τύπου ακεραίου (π.χ., byte, short, int και float στη Java)
- Component sum:
  - Χωρίζουμε τα bits του κλειδιού σε συστατικά σταθερού μήκους (π.χ., 16 ή 32 bits) και προσθέτουμε τα συστατικά (αγνοώντας τα overflows)
  - Κατάλληλο για αριθμητικά κλειδιά σταθερού μήκους μεγαλύτερου ή ίσου του αριθμού των bits του τύπου ακεραίου (π.χ., long και double στη Java)

Hash Code Maps (cont.)

- Polynomial accumulation:
  - Χωρίζουμε τα bits του κλειδιού σε μια ακολουθία συστατικων σταθερού μεγέθους (π.χ., 8, 16 ή 32 bits) $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$
  - Αποτιμούμε το πολυώνυμο $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$ σε μια σταθερή τιμή z, αγνοώντας τα overflows
  - Ιδιαίτερα κατάλληλο για αλφαρηθμητικά (π.χ., η επιλογή $z = 33$ δίνει το πολύ 6 συγκρούσεις σε ένα σύνολο 50,000 Αγγλικών λέξεων)
- Το πολυώνυμο $p(z)$ μπορεί να αποτιμηθεί σε χρόνο $O(n)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Horner:
  - Τα ακόλουθα πολυώνυμα υπολογίζονται διαδοχικά, το κάθε ένα από το προηγούμενο σε χρόνο $O(1)$
    $p_0(z) = a_{n-1}$
    $p_i(z) = a_{n-i-1} + z p_{i-1}(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$
- Ισχύει ότι $p(z) = p_{n-1}(z)$

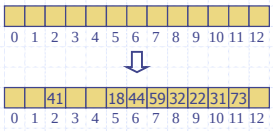
Compression Maps

- Division:
  - $h_2(y) = y \bmod N$
  - Το μέγεθος N του πίνακα κατακερματισμού συνήθως επιλέγεται να είναι πρώτος αριθμός
  - Ο λόγος έχει να κάνει με τη θεωρία αριθμών και είναι πέρα από τους σκοπούς του μαθήματος
- Multiply, Add and Divide (MAD):
  - $h_2(y) = (ay + b) \bmod N$
  - Οι a και b είναι θετικοί ακέραιοι έτσι ώστε $a \bmod N \neq 0$
  - Αλλιώς, κάθε ακέραιος θα απεικονιζόταν στην ίδια τιμή b

Linear Probing

- Το Linear probing χειρίζεται τις συγκρούσεις τοποθετώντας το συγκρουόμενο αντικείμενο στο επόμενο (κυκλικά) διαθέσιμο κελί του πίνακα
- Κάθε κελί του πίνακα που επιθεωρείται αναφέρεται ως "probe"
- Συγκρουόμενα αντικείμενα συσσωρεύονται, με συνέπεια μελλοντικές συγκρούσεις να προκαλούν μεγαλύτερες ακολουθίες από probes

- Παράδειγμα:
  - $h(x) = x \bmod 13$
  - Εισαγωγή των κλειδιών 18, 41, 22, 44, 59, 32, 31, 73, σε αυτή την σειρά



Search with Linear Probing

- Ας θεωρήσουμε ένα πίνακα κατακερματισμού A ο οποίος χρησιμοποιεί linear probing
- findElement(k)
  - Ξεκινάμε στο κελί $h(k)$
  - Ερευνούμε συνεχόμενες θέσεις μέχρι ένα από τα ακόλουθα να συμβεί
    - Ένα αντικείμενο με κλειδί k να βρεθεί, ή
    - Ένα άδειο κελί να βρεθεί, ή
    - N κελιά να ερευνηθούν ανεπιτυχώς

```
Algorithm findElement(k)
  i ← h(k)
  p ← 0
  repeat
    c ← A[i]
    if c = ∅
      return NO_SUCH_KEY
    else if c.key () = k
      return c.element()
    else
      i ← (i + 1) mod N
      p ← p + 1
  until p = N
  return NO_SUCH_KEY
```


Updates with Linear Probing

- Για να χειριστούμε εισαγωγές και διαγραφές, εισάγουμε ένα ειδικό αντικείμενο, ονόματι *AVAILABLE*, το οποίο αντικαθιστά διαγραφέντα στοιχεία
- removeElement(k)
  - Ψάχνουμε για ένα αντικείμενο με κλειδί k
  - Αν ένα τέτοιο αντικείμενο (k, o) βρεθεί, το αντικαθιστούμε με το ειδικό αντικείμενο *AVAILABLE* και επιστρέφουμε το στοιχείο o
  - Αλλιώς, επιστρέφουμε *NO_SUCH_KEY*
- insert Item(k, o)
  - Πετάμε exception αν ο πίνακας είναι πλήρης
  - Ξεκινάμε στο κελί $h(k)$
  - Ερευνούμε συνεχόμενα κελιά μέχρι ένα από τα ακόλουθα να συμβεί
    - Ένα κελί i να βρεθεί το οποίο είναι άδειο ή έχει αποθηκευμένη την τιμή *AVAILABLE*, ή
    - N κελιά να ερευνηθούν ανεπιτυχώς
  - Αποθηκεύουμε το αντικείμενο (k, o) στο κελί i

Double Hashing

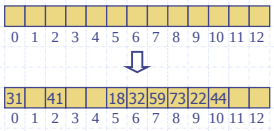
- Το Double hashing χρησιμοποιεί μια δευτερεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού $d(k)$ και χειρίζεται τις συγκρούσεις τοποθετώντας το αντικείμενο στο πρώτο διαθέσιμο κελί από τις σειρές
  $(i + jd(k)) \bmod N$
  για $j = 0, 1, \ldots, N - 1$
- Η δευτερεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού $d(k)$ δεν μπορεί να έχει μηδενικές τιμές
- Το μέγεθος N του πίνακα πρέπει να είναι πρώτος αριθμός έτσι ωστε να επιτρέπει την εξερεύνση όλων των κελιών

- Συνήθης επιλογή του compression map για τη δευτερεύουσα συνάρτηση κατακερματισμού :
  $d_2(k) = q - k \bmod q$
  όπου
  - $q < N$
  - q είναι πρώτος αριθμός
- Οι πιθανές τιμές για το $d_2(k)$ είναι
  $1, 2, \ldots, q$

Παράδειγμα Double Hashing

- Ας θεωρήσουμε ένα πίνακα κατακερματισμού ο οποίος αποθηκεύει ακέραια κλειδιά και χειρίζεται συγκρούσεις με double hashing
  - $N = 13$
  - $h(k) = k \bmod 13$
  - $d(k) = 7 - k \bmod 7$
- Εισαγωγή των κλειδιών 18, 41, 22, 44, 59, 32, 31, 73, σε αυτή την σειρά

k	$h(k)$	$d(k)$	Probes		
18	5	3	5		
41	2	1	2		
22	9	6	9		
44	5	5	5	10	
59	7	4	7		
32	6	3	6		
31	5	4	5	9	0
73	8	4	8		



Απόδοση του Hashing

- Στη χειρότερη περίπτωση, αναζητήσεις, εισαγωγές και διαγραφές σε ένα πίνακα κατακερματισμού εκτελείται σε χρόνο $O(n)$
- Η χειρότερη περίπτωση συμβαίνει όταν όλα τα κλειδιά που εισάγονται στο λεξικό συγκρούονται
- Ο παράγοντας φόρτου (load factor) $\alpha = n/N$ a επηρεάζει την απόδοση του πίνακα κατακερματισμού
- Υποθέτωντας ότι οι τιμές κατακερματισμού συμπεριφέρονται σαν τυχαίοι αριθμοί, μπορεί να δειχτεί ότι ο αναμενόμενος αριθμός από probes για μια εισαγωγή με open addressing είναι $1 / (1 - \alpha)$
- Ο αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης για όλες τις πράξεις του ΑΤΔ του λεξικού σε ένα πίνακα κατακερματισμού είναι $O(1)$
- Στην πράξη, το hashing είναι πολύ γρήγορο αν ο παράγοντας φόρτου δεν είναι κοντά στο 100%
- Εφαρμογές των πινάκων κατακερματισμού:
  - Μικρές βάσεις δεδομένων
  - Μεταφραστές (compilers)
  - browser caches