Στοίβες

Περιγραφή και Υλικό Ανάγνωσης

- Ο Αφηρημένος Τύπος Δεδομένων της Στοίβας (Stack Abstract Data Type (ADT)) (§2.1.1)
- Εφαρμογές για Στοίβες (§2.1.1)
- Υλοποίηση με βάση πίνακες (§2.1.1)
- Στοίβα βασισμένη σε πίνακα η οποία μπορεί να μεγαλώσει (§1.5)

Αφηρημένοι Τύποι Δεδομένων (ΑΤΔ)

- Ένας αφηρημένος τύπος δεδομένων είναι η αφηρημένη έννοια για μια δομής δεδομένων
- Ένας ΑΤΔ καθορίζει:
  - Τα δεδομένα που αποθηκεύονται
  - Τις πράξεις επάνω στα δεδομένα
  - Τις συνθήκες σφάλματος που σχετίζονται με πράξεις
- Παράδειγμα: Ένας ΑΤΔ που μοντελοποιεί ένα απλό σύστημα συναλλαγών μετοχών
  - Τα δεδομένα που αποθηκεύονται είναι εντολές αγοράς/πώλησης
  - Οι πράξεις που υποστηρίζονται είναι
    - order buy(stock, shares, price)
    - order sell(stock, shares, price)
    - void cancel(order)
  - Συνθήκες σφάλματος:
    - Αγορά/πώληση μιας ανύπαρκτης μετοχής
    - Ακύρωση μιας ανύπαρκτης εντολής

Ο ΑΤΔ της Στοίβας

- Ο ΑΤΔ της Στοίβας αποθηκεύει αυθαίρετα αντικείμενα
- Εισαγωγές και διαγραφές γίνονται με LIFO (last-in first-out)
- Σκεφτείτε ένα δοχείο με πιάτα με ελατήριο στον πάτο
- Κύριες πράξεις στοίβας:
  - push(object): εισάγει ένα αντικείμενο
  - object pop(): διαγράφει και επιστρέφει το αντικείμενο που εισήχθη τελευταίο
- Βοηθητικές πράξεις στοίβας:
  - object top(): επιστρέφει το πιο πρόσφατα εισαχθέν αντικείμενο χωρίς να το διαγράψει
  - integer size(): επιστρέφει τον αριθμό των αντικειμένων που βρίσκονται στη στοίβα
  - boolean isEmpty(): δηλώνει εάν υπάρχουν αντικείμενα στη στοίβα

Exceptions

- Κατά την προσπάθεια εκτέλεσης μιας πράξης ενός ΑΤΔ μπορεί κάποιες φορές να προκληθεί μια κατάσταση σφάλματος που ονομάζεται exception
- Τα exceptions λέγεται ότι "πετάγονται" από μια πράξη που δεν μπορεί να εκτελεστεί
- Στον ΑΤΔ της Στοίβας οι πράξεις pop και top δεν μπορούν να εκτελεστούν αν η στοίβα είναι άδεια
- Η εκτέλεση της πράξης pop ή top σε μια άδεια στοίβα πετάει ένα EmptyStackException

Εφαρμογές για Στοίβες

- Άμεσες εφαρμογές
  - Το ιστορικό των σελίδων που επισκεφθήκαμε σε έναν Web browser
  - Η σειρά των πράξεων Undo σε έναν επεξεργαστή κειμένου
  - Η αλυσίδα των κλήσεων μεθόδων στην Java Virtual Machine
- Έμμεσες εφαρμογές
  - Βοηθητικές δομές δεδομένων σε αλγόριθμους
  - Συστατικό σε άλλες δομές δεδομένων

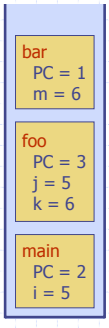
Η Στοίβα Μεθόδων στη JVM

- Η Java Virtual Machine (JVM) παρακολουθεί την αλυσίδα των ενεργών μεθόδων με μια στοίβα
- Όταν κληθεί μια μέθοδος, η JVM κάνει push ένα πλαίσιο το οποίο περιέχει
  - Τοπικές μεταβλητές και τιμή επιστροφής
  - Τον program counter, ο οποίος παρακολουθεί την εντολή η οποία εκτελείται
- Όταν τελειώνει μια μέθοδος, το πλαίσιο εξάγεται από την στοίβα (γίνεται pop) και ο έλεγχος περνά στην μέθοδο που βρίσκεται πλέον στην κορυφή της στοίβας

```
main() {
  int i = 5;
  foo(i);
  }

foo(int j) {
  int k;
  k = j+1;
  bar(k);
  }

bar(int m) {
  …
  }
```



Στοίβα βασισμένη σε πίνακα

- Ένας απλός τρόπος υλοποίησης του ΑΤΔ της Στοίβας γίνεται με πίνακα
- Προσθέτουμε στοιχεία από αριστερά προς τα δεξιά
- Μια μεταβλητή παρακολουθεί τον δείκτη του πάνω στοιχείου της στοίβας

Algorithm ***size***()
  return $t + 1$

Algorithm ***pop***()
  if *isEmpty*() **then**
    throw *EmptyStackException*
  else
    $t \leftarrow t - 1$
    return $S[t + 1]$

Στοίβα βασισμένη σε πίνακα (συνέχεια)

- Ο πίνακας που περιέχει τα στοιχεία της στοίβας μπορεί να γεμίσει
- Μια πράξη push θα πετάξει τότε ένα FullStackException
  - Περιορισμός της υλοποίησης με βάση πίνακες
  - Δεν είναι εγγενής στον ΑΤΔ της Στοίβας

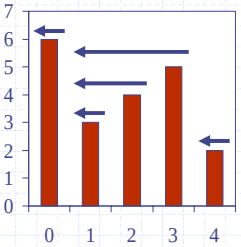
```
Algorithm push(o)
  if t = S.length − 1 then
    throw FullStackException
  else
    t ← t + 1
    S[t] ← o
```

Απόδοση και Περιορισμοί

- Απόδοση
  - Έστω ότι η στοίβα περιέχει n στοιχεία
  - Ο χώρος που καταλαμβάνεται είναι $O(n)$
  - Κάθε πράξη τρέχει σε χρόνο $O(1)$
- Περιορισμοί
  - Το μέγεθος της στοίβας πρέπει να ορισθεί εξ' αρχής και δεν μπορεί να αλλάξει
  - Το να γίνει push ένα νέο στοιχείο σε μια γεμάτη στοίβα προκαλεί μια exception που εξαρτάται από την υλοποίηση

Υπολογίζοντας Spans

- Θα δείξουμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η στοίβα σαν μια βοηθητική δομή δεδομένων σε έναν αλγόριθμο
- Δεδομένου ενός πίνακα X, το span $S[i]$ του $X[i]$ είναι ο μέγιστος αριθμός συνεχών στοιχείων $X[j]$ που βρίσκονται αμέσως πριν το $X[i]$ έτσι ώστε $X[j] \leq X[i]$
- Τα spans βρίσκουν εφαρμογή στην οικονομική ανάλυση
  - Π.χ., μετοχές σε μέγιστα 52 εβδομάδων



X	6	3	4	5	2
S	1	1	2	3	1

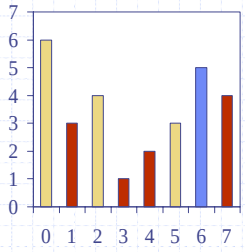
Ο Αλγόριθμος σε Τετραγωνικό χρόνο

```
Algorithm spans1(X, n)
  Input array X of n integers
  Output array S of spans of X                    #
  S ← new array of n integers                     n
  for i ← 0 to n − 1 do                           n
    s ← 1                                         n
    while s ≤ i ∧ X[i − s] ≤ X[i]                 1 + 2 + …+ (n − 1)
      s ← s + 1                                   1 + 2 + …+ (n − 1)
    S[i] ← s                                      n
  return S                                        1
```

- Ο Αλγόριθμος *spans1* τρέχει σε χρόνο $O(n^2)$

Υπολογίζοντας Spans χρησιμοποιώντας μια Στοίβα

- Κρατάμε σε μια στοίβα τους δείκτες των στοιχείων που είναι ορατά αν "κοιτάξουμε πίσω"
- Σαρώνουμε τον πίνακα από τα αριστερά προς τα δεξιά
  - Έστω ότι i είναι ο τρέχον δείκτης
  - Κάνουμε pop τους δείκτες από την στοίβα μέχρι να βρούμε ένα δείκτη j τέτοιο ώστε $X[i] < X[j]$
  - Θέτουμε $S[i] \leftarrow i - j$
  - Κάνουμε push το x στη στοίβα



Ο Αλγόριθμος σε Γραμμικό χρόνο

- Κάθε δείκτης του πίνακα
  - Εισάγεται (με push) στη στοίβα ακριβώς μια φορά
  - Εξάγεται (με pop) από την στοίβα το πολύ μια φορά
- Οι εντολές στον while βρόχο εκτελούνται το πολύ n φορές
- Ο Αλγόριθμος *spans2* τρέχει σε χρόνο $O(n)$

```
Algorithm spans2(X, n)                          #
  S ← new array of n integers                   n
  A ← new empty stack                           1
  for i ← 0 to n − 1 do                         n
    while (¬A.isEmpty() ∧
           X[top()] ≤ X[i] ) do                 n
      j ← A.pop()                               n
    if A.isEmpty() then                         n
      S[i] ← i + 1                              n
    else
      S[i] ← i − j                              n
    A.push(i)                                   n
  return S                                      1
```


Στοίβα βασισμένη σε πίνακα η οποία μπορεί να μεγαλώσει

- Σε μια πράξη push, όταν ο πίνακας είναι γεμάτος, αντί να πετάξουμε ένα exception, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον πίνακα με έναν μεγαλύτερο
- Πόσο μεγάλος πρέπει να είναι ο νέος πίνακας;
  - αυξητική στρατηγική: αύξησε το μέγεθος κατά c (σταθερά)
  - στρατηγική διπλασιασμού: διπλασίασε το μέγεθος

```
Algorithm push(o)
  if t = S.length − 1 then
    A ← new array of
        size …
    for i ← 0 to t do
      A[i] ← S[i]
    S ← A
  t ← t + 1
  S[t] ← o
```


Σύγκριση των Στρατηγικών

- Θα συγκρίνουμε την αυξητική στρατηγική με την στρατηγική διπλασιασμού με το να αναλύσουμε τον συνολικό χρόνο που απαιτείται για να εκτελεστεί μια σειρά από n πράξεις push
- Υποθέτουμε ότι ξεκινάμε με μια άδεια στοίβα η οποία αντιπροσωπεύεται από έναν πίνακα μεγέθους 1
- Θα ονομάσουμε αποσβησμένο χρόνο μιας πράξης push τον μέσο χρόνο που χρειάζεται η push για όλη τη σειρά των πράξεων, δηλαδή, $T(n)/n$

Ανάλυση Αυξητικής Στρατηγικής

- Αντικαθιστούμε τον πίνακα $k = n/c$ φορές
- Ο συνολικός χρόνος $T(n)$ μιας σειράς από n πράξεις push είναι ανάλογος με

$$n + c + 2c + 3c + 4c + \ldots + kc =$$
$$n + c(1 + 2 + 3 + \ldots + k) =$$
$$n + ck(k + 1)/2$$

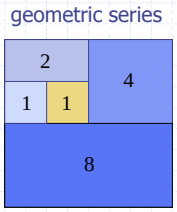
- Αφού ο c είναι μια σταθερά, ο χρόνος $T(n)$ είναι $O(n + k^2)$, δηλαδή, $O(n^2)$
- Ο αποσβησμένος χρόνος μιας πράξης push είναι $O(n)$

Ανάλυση Στρατηγικής Διπλασιασμού

- Αντικαθιστούμε τον πίνακα $k = \log_2 n$ φορές
- Ο συνολικός χρόνος $T(n)$ μιας σειράς από n πράξεις push είναι ανάλογος με

$$n + 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k =$$
$$n + 2^{k+1} - 1 = 2n - 1$$

- Ο χρόνος $T(n)$ είναι $O(n)$
- Ο αποσβησμένος χρόνος μιας πράξης push είναι $O(1)$



Το Interface της Στοίβας στη Java

- Το Java interface που αντιστοιχεί στον δικό μας ΑΤΔ της Στοίβας
- Απαιτεί τον ορισμό της κλάσης EmptyStackException
- Διαφέρει από την ενσωματωμένη στην Java κλάση java.util.Stack

```
public interface Stack {
   public int size();
   public boolean isEmpty();
   public Object top()
       throws EmptyStackException;
   public void push(Object o);
   public Object pop()
       throws EmptyStackException;
}
```


Στοίβα βασισμένη σε πίνακα στη Java

```
public class ArrayStack
    implements Stack {
  // holds the stack elements
  private Object S[ ];
  // index to top element
  private int top = -1;
  // constructor
  public ArrayStack(int capacity) {
     S = new Object[capacity]);
  }
```

```
public Object pop()
    throws EmptyStackException {
  if isEmpty()
     throw new EmptyStackException
       ("Empty stack: cannot pop");
  Object temp = S[top];
  // facilitates garbage collection
  S[top] = null;
  top = top – 1;
  return temp;
}
```