Εξέταση Σεπτεμβρίου

Διάρκεια: 3 ώρες

Πρόβλημα 1 [25 μονάδες] Έστω $G = (V, E)$ συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα και έστω $w : E \to \mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους επί των ακμών του G, και έστω ότι το βεβαρυμένο γράφημα (G, w) έχει μοναδικό ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο. Θεωρήστε μία νέα συνάρτηση βάρους $w' : E \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$w'(e) = \alpha\, w(e) + \beta, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Δείξτε ότι το βεβαρυμένο γράφημα (G, w') έχει το ίδιο ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο με το (G, w).

Πρόβλημα 2 [25 μονάδες] Θεωρήστε ένα σύνολο σημείων P στο επίπεδο και έστω n το πλήθος των σημείων στο P, τέτοια ώστε για κάθε δύο σημεία $p, q \in P$ ισχύει ότι $x_p \neq x_q$ και $y_p \neq y_q$ (όπου x_s και y_s είναι η x και y συνιστώσα ενός σημείου s). Δεδομένου ενός σημείου σ στο επίπεδο, ονομάζουμε $SW_P(\sigma)$ το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται νοτιοδυτικά του σ και ανήκουν στο P, και πιο συγκεκριμένα:

$$SW_P(\sigma) = \{s \in P : x_s < x_\sigma \text{ και } y_s < y_\sigma\}.$$

Αντίστοιχα ορίζονται τα σύνολα $NW_P(\sigma)$, $SE_P(\sigma)$, $NE_P(\sigma)$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} NW_P(\sigma) &= \{s \in P : x_s < x_\sigma \text{ και } y_s > y_\sigma\}, \\ SE_P(\sigma) &= \{s \in P : x_s > x_\sigma \text{ και } y_s < y_\sigma\}, \text{ και} \\ NE_P(\sigma) &= \{s \in P : x_s > x_\sigma \text{ και } y_s > y_\sigma\}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εύρεσης διαμέσου αντικειμένων σε γραμμικό χρόνο, σχεδιάστε, γραμμικό ως προς n, αλγόριθμο για την εύρεση σημείου σ το οποίο να ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις παρακάτω δύο σχέσεις:

1. $|NW_P(\sigma)| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ και $|SE_P(\sigma)| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.
2. $|SW_P(\sigma)| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ και $|NE_P(\sigma)| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

Πρόβλημα 3 [25 μονάδες] Θεωρήστε ένα βεβαρυμένο κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$ και έστω $s \in V$. Επιπλέον για το βεβαρυμένο γράφημα (G, w) σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία:

1. Το βάρος κάθε ακμής είναι μοναδικό (δηλαδή η συνάρτηση w είναι "1-1" ή ισοδύναμα, για κάθε $e, e' \in E$, με $e \neq e'$, έχουμε $w(e) \neq w(e')$).
2. Για κάθε κόμβο $v \in V \setminus \{s\}$, τα βάρη των ακμών κατά μήκος οποιουδήποτε ελαχίστου μονοπατιού από τον s στον v εμφανίζονται σε αύξουσα σειρά.

Δείξτε ότι μπορούμε να υπολογίζουμε τα ελάχιστα μονοπάτια από τον κόμβο s σε κάθε άλλο κόμβο του G σε χρόνο $O(V + E \log V)$.

Πρόβλημα 4 [25 μονάδες] Θεωρήστε ένα βεβαρυμένο ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα (DAG) $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$. Σε πόσο χρόνο μπορούν να υπολογιστούν τα ελάχιστα μονοπάτια από κάθε κόμβο σε κάθε κόμβο του γραφήματος. Το χρονικό κόστος πρέπει να είναι ακριβές, δηλαδή της μορφής $\Theta(f(V, E))$, όπου f είναι η συνάρτηση χρονικού κόστους που σας ζητείται να υπολογίσετε.

Σύνολο μονάδων: 100