Πρόοδος

Διάρκεια: $1\frac{3}{4}$ ώρες

Πρόβλημα 1 [10 μονάδες] Έστω $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, όπου $n \geq 2$. Περιγράψτε έναν έναν αλγόριθμο, ο οποίος να έχει χρονικό κόστος $o(n^2)$, και ο οποίος βρίσκει και επιστρέφει δύο στοιχεία x_k και x_ℓ του S, τέτοια ώστε:

$$|x_k - x_\ell| = \min_{1\leq i,j\leq n} |x_i - x_j|.$$

Πρόβλημα 2 [30 μονάδες] Θεωρήστε την αναδρομική σχέση

$$T(n) = 3\,T(n/3) + n \lg^2 n.$$

Εξηγήστε γιατί δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Θεώρημα για την παραπάνω αναδρομική σχέση. Στη συνέχεια δείξτε ότι $T(n) = \Theta(n \lg^3 n)$. Προσέξτε ότι πρέπει να δείξετε τόσο ότι $T(n) = O(n \lg^3 n)$ όσο και ότι $T(n) = \Omega(n \lg^3 n)$.

Πρόβλημα 3 [30 μονάδες] Λέμε ότι μία ακολουθία αριθμών $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 3$, είναι *γνησίως εναλλασσόμενη* αν για κάθε i, με $2 \leq i \leq n-1$, ισχύει ένα εκ των δύο παρακάτω:

1. $a_{i-1} < a_i$ και $a_i > a_{i+1}$, είτε
2. $a_{i-1} > a_i$ και $a_i < a_{i+1}$.

Για παράδειγμα οι ακολουθίες $(2, 10, 5, 6, 3, 11, -1, 7, 4)$ και $(2, -7, 4, 3, 6, 0, 33, 2)$ είναι εναλλασσόμενες, ενώ η ακολουθία $(5, 6, 7, 3, 4, -2, 7, 10)$ δεν είναι. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος, δεδομένης μίας εναλλασσόμενης ακολουθίας αριθμών A, εκτελεί το πολύ $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ συγκρίσεις προκειμένου να υπολογίσει το ελάχιστο στοιχείο της A. Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 4 [30 μονάδες] Μία ακολουθία αριθμών $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ θα ονομάζεται *γνησίως κυρτή* αν υπάρχει k, με $1 \leq k \leq n$, τέτοιο ώστε για κάθε $1 \leq i \leq k-1$ να έχουμε $a_i > a_{i+1}$, ενώ για κάθε $k \leq i \leq n-1$ να έχουμε $a_i < a_{i+1}$. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος να βρίσκει το ελάχιστο στοιχείο της ακολουθίας A σε χρόνο $O(\lg n)$. Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

Σύνολο μονάδων: 100