ΕΜ202 - Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων **11 Ιουνίου 2010**

Εξέταση Ιουνίου

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

Πρόβλημα 1 [30 μονάδες] Έστω $G = (V, E)$ συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα και έστω $w : E \to \mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους επί των ακμών του G. Έχουμε δείξει ότι ο αλγόριθμος του Prim υπολογίζει το ελάχιστο συνδετικό δέντρομγια το βεβαρυμένο γράφημα (G, w) σε χρόνο $O(E \log V)$. Υποθέστε τώρα ότι η συνάρτηση βάρους w παίρνει ακέραιες τιμές μεταξύ 1 και W, όπου $W \in \mathbb{N}^\star$. Εξηγήστε πώς μπορεί να τροποποιηθεί ο αλγόριθμος του Prim ώστε να τρέχει σε χρόνο $O(E\alpha(V) + W)$.

Πρόβλημα 2 [40 μονάδες] Θεωρήστε κατευθυνόμενο βεβαρυμένο γράφημα $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$, και έστω $s \in V$ κάποιος κόμβος του G. Υποθέστε το γράφημα G περιέχει κυκλώματα και ότι $E = \Theta(V^{1+\varepsilon})$, όπου $\varepsilon \in (0, 1)$.

Πόσο γρήγορα μπορούν να υπολογιστούν οι ελαφρύτερες διαδρομές από τον κόμβο s σε όλους τους άλλους κόμβους του G; Πόσο γρήγορα μπορούν να υπολογιστούν οι ελαφρύτερες διαδρομές από κάθε κόμβο του G σε κάθε άλλο κόμβο του G;

Θεωρήστε τώρα ότι $w : E \to \mathbb{R}^+$, δηλαδή $w(e) > 0$, για κάθε $e \in E$. Στην περίπτωση αυτή, πόσο γρήγορα μπορούν να υπολογιστούν οι ελαφρύτερες διαδρομές από τον κόμβο s σε όλους τους άλλους κόμβους του G; Πόσο γρήγορα μπορούν να υπολογιστούν οι ελαφρύτερες διαδρομές από κάθε κόμβο του G σε κάθε άλλο κόμβο του G;

Πρόβλημα 3 [30 μονάδες] Θα λέμε ότι μία ακολουθία n αριθμών A είναι γνησίως κυρτή αν υπάρχει k, με $1 \leq k \leq n$, τέτοιο ώστε για κάθε i με $1 \leq i < k$, ισχύει $a_i > a_{i+1}$, ενώ για κάθε i με $k < i \leq n$, ισχύει $a_{i-1} < a_i$. Μία γνησίως κυρτή ακολουθία A θα λέγεται *συμμετρική* αν για κάθε j με $1 \leq j \leq \min\{k-1, n-k\}$, ισχύει $a_{k-j} = a_{k+j}$.

Θεωρήστε την ακολουθία B η οποία προκύπτει αν ταξινομήσουμε μία συμμετρική γνησίως κυρτή ακολουθία A με ευσταθή τρόπο. Ορίζουμε ως *τάξη* ενός στοιχείου της A τη θέση του στην ακολουθία B. Για παράδειγμα αν

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) = (21, 10, 7, 3, 7, 10, 21, 30, 76),$$

τότε

$$B = (a_4, a_3, a_5, a_2, a_6, a_1, a_7, a_8, a_9) = (3, 7, 7, 10, 10, 21, 21, 30, 76)$$

και η τάξη του στοιχείου a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 είναι αντίστοιχα $6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 8, 9$. Ομοίως αν

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) = (71, 42, 39, 21, 17, 4, 17, 21, 39),$$

τότε

$$B = (a_6, a_5, a_7, a_4, a_8, a_3, a_9, a_2, a_1) = (4, 17, 17, 21, 21, 39, 39, 42, 71)$$

και η τάξη του στοιχείου a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 είναι αντίστοιχα $9, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7$.

Δείξτε ότι το στοιχείο τάξης i μιας συμμετρικής κυρτής ακολουθίας A μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(\lg n)$.

Σύνολο μονάδων: 100