

Άσκηση 4

Ημερομηνία Παράδοσης: 19 Δεκεμβρίου 2011

Σημείωση: Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν δοθεί ως θέματα σε προόδους και τελικά διαγωνίσματα τα προηγούμενα έτη.

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Δείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ασυμπτωτικής επικράτησης, ότι η ακολουθία a_n επικρατεί ασυμπτωτικά της ακολουθίας b_n , όπου

$$a_n = \sqrt{n} 3^n, \quad b_n = n^2 2^n, \quad n \geq 0$$

. Η ακολουθία b_n επικρατεί ασυμπτωτικά της ακολουθίας a_n ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 2 [30 μονάδες] Λύστε την παρακάτω γραμμική αναδρομική σχέση:

$$a_n - 4a_{n-1} = -n2^{n+2} + 8 \cdot 4^n + f(n), \quad n \geq 1, \quad f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

με συνοριακές συνθήκες $a_0 = 10$.

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Λύστε την παρακάτω γραμμική αναδρομική σχέση με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων:

$$a_n - 5a_{n-1} = 2^{n+1} + f(n), \quad n \geq 1,$$

με συνοριακές συνθήκες $a_0 = 5$, όπου:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

Πρόβλημα 4 [30 μονάδες] Υπολογίστε τη λύση της παρακάτω αναδρομικής σχέσης, βρίσκοντας πρώτα την ομογενή και την ειδική της λύση:

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = -15 \cdot 2^{n-1} - 12n + 44, \quad n \geq 2,$$

με συνοριακές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = -7$.

Σύνολο μονάδων: 100