Άσκηση 3

Ημερομηνία Παράδοσης: 28 Νοεμβρίου 2011

Πρόβλημα 1 [40 μονάδες] Θα λέμε ότι ένα μονοπάτι σε ένα γράφημα είναι *γνήσιο* ο αρχικός κόμβος του μονοπατιού είναι διαφορετικός από τον τελικό κόμβο του μονοπατιού.
Θεωρήστε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με $n \geq 3$ κορυφές, και έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ οι κορυφές του G. Υποθέτουμε ότι το γράφημα G έχει γνήσιο μονοπάτι Euler, δηλαδή έχει μονοπάτι Euler το οποίο είναι γνήσιο μονοπάτι του G. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αρχικός κόμβος του μονοπατιού Euler είναι ο v_1 και ο τελικός κόμβος του μονοπατιού Euler ο v_n.

(α΄) [30 μονάδες] Αποδείξτε ότι το γράφημα G έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά γνήσια μονοπάτια Euler αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

1. Οι βαθμοί των v_1 και v_n είναι τουλάχιστον 3.
2. Ο βαθμός ενός εκ των v_1, v_n είναι τουλάχιστον 3, ενώ υπάρχει κόμβος v_k, με $1 < k < n$, με βαθμό τουλάχιστον 4.
3. Υπάρχουν δύο κόμβοι v_k και v_ℓ, με $1 < k < \ell < n$, με βαθμό τουλάχιστον 4.

(β΄) [10 μονάδες] Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα, αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 2$, υπάρχει *ακριβώς ένα* μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, το οποίο έχει *ακριβώς ένα* γνήσιο μονοπάτι Euler (ένα μονοπάτι, σε μη κατευθυνόμενο γράφημα, που το διατρέχουμε προς τις δύο διαφορετικές κατευθύνσεις του *δεν* το μετράμε δύο διαφορετικά μονοπάτια).

Πρόβλημα 2 [60 μονάδες] Θεωρήστε δύο φυσικούς αριθμούς $m \geq n \geq 1$. Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ τα πλήρη μη κατευθυνόμενα γραφήματα με n και m κορυφές, αντίστοιχα (με άλλα λόγια το γράφημα G_1 είναι το K_n, και το γράφημα G_2 είναι το K_m), και υποθέστε ότι $V_1 \neq V_2$ (δηλαδή τα δύο γραφήματα δεν έχουν κοινές κορυφές). Έστω, επίσης, μία συνάρτηση $f : V_1 \to V_2$ από το σύνολο κορυφών του G_1 στο σύνολο κορυφών του G_2, και υποθέστε ότι η f είναι «1-1» (παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο είναι πάντα δυνατό δεδομένου ότι ο αριθμός m των κορυφών του G_2 μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού n των κορυφών του G_1).
Θεωρούμε ένα νέο μη κατευθυνόμενο γράφημα, το $G = (V, E)$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2, \\ E &= E_1 \cup E_2 \cup \{\{v, f(v)\} \mid v \in V_1\}. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια το G έχει ως κορυφές τις κορυφές των G_1 και G_2, και ως ακμές τις ακμές των G_1, G_2, καθώς και όλες τις ακμές που έχουν ως ένα άκρο κάποια κορυφή του G_1 και ως άλλο άκρο της εικόνα της κορυφής αυτής μέσω της συνάρτησης f.

(α΄) [10 μονάδες] Για ποιες τιμές των n και m, έχει το G κύκλωμα Hamilton;

(β΄) [10 μονάδες] Για ποιες τιμές των n και m, έχει το G μονοπάτι Hamilton;

(γ΄) [20 μονάδες] Για ποιες τιμές των n και m, έχει το G κύκλωμα Euler;

(δ΄) [20 μονάδες] Για ποιες τιμές των n και m, έχει το G μονοπάτι Euler;

Αιτιολογήστε με αποδείξεις όλες τις απαντήσεις σας, είτε πρόκειται για ζεύγη τιμών για τα m και n για τις οποίες το G έχει το ζητούμενο μονοπάτι/κύκλωμα, είτε πρόκειται για ζεύγη τιμών για τα m και n για τις οποίες το G δεν έχει το ζητούμενο μονοπάτι/κύκλωμα.

Σύνολο μονάδων: 100