

Άσκηση 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Νοεμβρίου 2011

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Έστω R_1 και R_2 διμελείς σχέσεις επί συνόλου A .

- (α') [10 μονάδες] Έστω ότι οι R_1 και R_2 είναι σχέσεις ισοδυναμίας. Είναι η $R_1 \cap R_2$ σχέση ισοδυναμίας; Είναι η $R_1 \cup R_2$ σχέση ισοδυναμίας; Είναι η $R_1 \oplus R_2$ σχέση ισοδυναμίας;
- (β') [10 μονάδες] Έστω ότι οι R_1 και R_2 είναι σχέσεις μερικής διάταξης. Είναι η $R_1 \cap R_2$ σχέση μερικής διάταξης; Είναι η $R_1 \cup R_2$ σχέση μερικής διάταξης; Είναι η $R_1 \oplus R_2$ σχέση μερικής διάταξης;

Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας παραθέτοντας απόδειξη ή δίνοντας αντιπαράδειγμα.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Έστω R μια διμελής σχέση. Έστω $S = \{(a, b) \mid (a, c) \in R \text{ και } (c, b) \in R \text{ για κάποιο } c\}$. Δείξτε ότι αν η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας τότε και η S είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Έστω το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, και μία διμελής σχέση R επί του A , η οποία ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα. Οι γραμμές δηλώνουν το πρώτο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R , ενώ οι στήλες δηλώνουν το δεύτερο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R (κατά συνέπεια, $(c, a) \in R$, αλλά $(a, c) \notin R$). Με R_i , $i \geq 1$, συμβολίζουμε την i -οστή μεταβατική επέκταση της R , και με R^* τη μεταβατική θήκη της R .

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	✓							
b		✓						
c	✓	✓	✓					
d			✓	✓				
e			✓		✓			
f				✓	✓	✓		
g					✓	✓	✓	
h						✓		✓

- (α') [4 μονάδες] Κατασκευάστε τον πίνακα της R_1 .
- (β') [4 μονάδες] Κατασκευάστε τον πίνακα της R_2 .
- (γ') [4 μονάδες] Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse της R^* .
- (δ') [4 μονάδες] Βρείτε δύο διαφορετικές διαμερίσεις του A στον ελάχιστο αριθμό αντιαλυσίδων της R^* .
- (ε') [4 μονάδες] Διατάξτε τα στοιχεία του A σε μία σειρά $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$, έτσι ώστε να ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω συνθήκες για κάθε i και j , με $1 \leq i < j \leq 8$:
1. $(\alpha_i, \alpha_j), (\alpha_j, \alpha_i) \notin R^*$, ή
 2. $(\alpha_i, \alpha_j) \in R^*$.

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Έστω $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ μια διαμέριση ενός συνόλου A . Ορίζουμε μια διμελή σχέση R επί του A τέτοια ώστε αν $a, b \in A$, το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) ανήκει στην R αν και μόνο αν τα a και b ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο της διαμέρισης του A . Δείξτε ότι η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Έστω R μια ανακλαστική και μεταβατική σχέση του συνόλου A . Έστω T μια σχέση επί του A τέτοια ώστε το (a, b) ανήκει στην T , αν και μόνο αν και το (a, b) και το (b, a) ανήκουν στην R . Δείξτε ότι η T είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Σύνολο μονάδων: 100