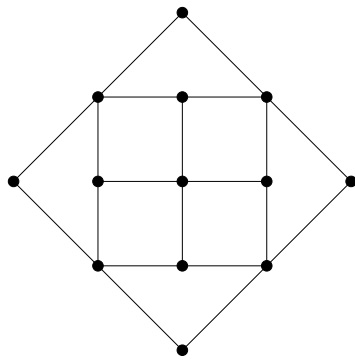
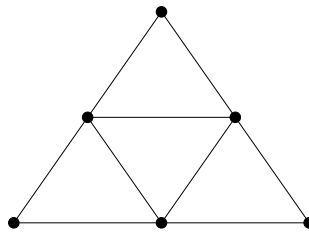


Άσκηση 3

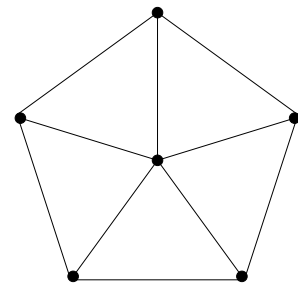
Πρόβλημα 1 [30 μονάδες] Λέγοντας ότι χρωματίζουμε γνήσιως ένα γράφημα εννοούμε ότι χρωματίζουμε τις κορυφές του γραφήματος έτσι ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα. Ποιός είναι ο ελάχιστος απαραίτητος αριθμός χρωμάτων για ένα γνήσιο χρωματισμό των τριών γραφημάτων G_1 , G_2 και G_3 του παρακάτω σχήματος;



G_1



G_2



G_3

Δείξτε ότι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί γνήσιως με δύο χρώματα αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα κύκλωμα περιττού μήκους.

Πρόβλημα 2 [10 μονάδες] Εξετάστε αν τα γραφήματα K_{999} και K_{1000} έχουν κύκλωμα Euler και κύκλωμα Hamilton.

Πρόβλημα 3 [40 μονάδες] Ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$ είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ με $|V_1| = m$ και $|V_2| = n$, τέτοιο ώστε δύο κορυφές του ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν η μία ανήκει στο V_1 και η άλλη στο V_2 . Ένα μονοπάτι σε ένα γράφημα λέγεται γνήσιο αν ο αρχικός και τελικός του κόμβος είναι διαφορετικοί.

- (α') [5 μονάδες] Έχουν τα $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$ και $K_{4,4}$ κύκλωμα Euler; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (β') [5 μονάδες] Έχουν τα $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$ και $K_{4,4}$ γνήσιο μονοπάτι Euler; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (γ') [5 μονάδες] Έχουν τα $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$ και $K_{4,4}$ κύκλωμα Hamilton; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (δ') [5 μονάδες] Έχουν τα $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$ και $K_{4,4}$ γνήσιο μονοπάτι Hamilton; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (ε') [5 μονάδες] Διατυπώστε και αποδείξτε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα m και n προκειμένου να υπάρχει κύκλωμα Euler στο $K_{m,n}$.
- (ς') [5 μονάδες] Διατυπώστε και αποδείξτε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα m και n προκειμένου να υπάρχει γνήσιο μονοπάτι Euler στο $K_{m,n}$.
- (ζ') [5 μονάδες] Διατυπώστε και αποδείξτε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα m και n προκειμένου να υπάρχει κύκλωμα Hamilton στο $K_{m,n}$.
- (η') [5 μονάδες] Διατυπώστε και αποδείξτε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα m και n προκειμένου να υπάρχει γνήσιο μονοπάτι Hamilton στο $K_{m,n}$.

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Ένα γραμμικό επίπεδο γράφημα χωρίς βρόχους λέγεται *τριγωνοποίηση*, αν κάθε χωρίο του, εκτός από το άπειρο χωρίο, έχει ακριβώς τρεις ακμές, και αν δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε ακμή μεταξύ δύο κορυφών του γραφήματος χωρίς να πάψει να είναι επίπεδο. Έστω τριγωνοποίηση T με $n \geq 6$ κορυφές, της οποίας το άπειρο χωρίο έχει 6 κορυφές. Βρείτε τον αριθμό των ακμών της T συναρτήσει του αριθμού των κορυφών της, δηλαδή συναρτήσει του n .

Υπόδειξη: Βρείτε σχέση μεταξύ του αριθμού των χωρίων της T και του αριθμού των ακμών της T .

Σύνολο μονάδων: 100