

Άσκηση 2

Πρόβλημα 1 [10 μονάδες] Μία σχέση μερικής διάταξης R επί συνόλου A λέγεται *δικτυωτό* αν για κάθε $a, b \in A$, τα a και b έχουν μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα και μοναδικό μέγιστο κάτω φράγμα. Είναι το καρτεσιανό γινόμενο δύο δικτυωτών πάντα ένα δικτυωτό;

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Έστω R μια διμελής σχέση από το A στο B . Η *αντίστροφη* της R , η οποία συμβολίζεται R^{-1} , είναι μία διμελής σχέση από το B στο A τέτοια ώστε:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

1. Έστω R_1 και R_2 διμελείς σχέσεις από το A στο B . Είναι αλήθεια ότι $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
2. Έστω R μια διμελής σχέση πάνω στο A . Αν η R είναι ανακλαστική, είναι αναγκαστικά η R^{-1} ανακλαστική; Αν η R είναι συμμετρική, είναι αναγκαστικά η R^{-1} συμμετρική; Αν η R είναι μεταβατική, είναι αναγκαστικά η R^{-1} μεταβατική;
3. Αν η R είναι αντισυμμετρική, είναι αναγκαστικά η R^{-1} αντισυμμετρική;

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Έστω P ένα αυθαίρετο μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω L μία αλυσίδα δύο στοιχείων. Έστω Q το καρτεσιανό γινόμενο $P \times L$. Έστω A μία αντιαλυσίδα στο Q . Έστω B το μέγιστο δυνατό υποσύνολο του P τέτοιο ώστε το B να μην περιέχει μια αλυσίδα μήκους μεγαλύτερου από 2. Δείξτε ότι $|A| \leq |B|$.

Πρόβλημα 4 [10 μονάδες] Έστω x_1, x_2, \dots, x_n n αυθαίρετοι ακέραιοι. Δείξτε ότι το άθροισμα $x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k}$ διαιρείται από το n για κάποια i και k , $i \geq 1$, $k \geq 0$.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Δείξτε ότι ανάμεσα σε $n + 1$ θετικούς ακεραίους μικρότερους ή ίσους από το $2n$ υπάρχουν δύο οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι.

Πρόβλημα 6 [20 μονάδες] Έστω σύνολο $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ με n στοιχεία, και έστω R σχέση μερικής διάταξης επί του A .

(α') [10 μονάδες] Δείξτε ότι μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία του A σε μία ακολουθία a'_1, a'_2, \dots, a'_n , έτσι ώστε για κάθε i και j με $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ και $i < j$ να ισχύουν οι παρακάτω δύο ιδιότητες:

1. $(a'_i, a'_j) \in R$, είτε
2. $(a'_i, a'_j), (a'_j, a'_i) \notin R$ (δηλαδή τα στοιχεία a'_i και a'_j δεν είναι συγκρίσιμα ως προς τη σχέση μερικής διάταξης R).

(β') [10 μονάδες] Δείξτε ότι η διάταξη των στοιχείων του A που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα είναι μοναδική αν και μόνο αν η R είναι σχέση ολικής διάταξης.

Σύνολο μονάδων: 100