

Άσκηση 1

Πρόβλημα 1 [10 μονάδες] Αποδείξτε με επαγωγή ότι το άθροισμα των κύβων τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Δείξτε ότι η ένωση αριθμησίμου πλήθους αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Με άλλα λόγια αν A_i αριθμήσιμο σύνολο, για κάθε $i \geq 0$, τότε και το σύνολο

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Η απόδειξη που σας ζητείται μοιάζει με την απόδειξη ότι αν A και B αριθμήσιμα σύνολα, τότε και το $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόβλημα 3 [10 μονάδες] Έστω p και q δύο προτάσεις.

(α') [5 μονάδες] Αν η πρόταση $p \rightarrow q$ είναι ψευδής, προσδιορίστε την τιμή αληθείας της πρότασης $(\bar{p} \vee \bar{q}) \rightarrow q$.

(β') [5 μονάδες] Αν σας δίνεται ότι η τιμή του $p \rightarrow q$ είναι αληθής, μπορείτε να προσδιορίσετε την τιμή του $\bar{p} \vee (p \leftrightarrow q)$;

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες]

(α') [10 μονάδες] Αποδείξτε ότι αν A και B άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

(β') [5 μονάδες] Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος για να δείξετε επαγωγικά ότι το σύνολο \mathbb{N}^k , $k \geq 2$, όπου

$$\mathbb{N}^k = \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N}, & k = 2 \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{k-1}, & k > 2 \end{cases}$$

είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(γ') [5 μονάδες] Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να δείξετε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών \mathbb{Q} είναι αριθμήσιμο.

Πρόβλημα 5 [10 μονάδες] Δείξτε ότι για οποιονδήποτε ακέραιο n ο αριθμός $(11)^{n+2} + (12)^{2n+1}$ διαιρείται με το 133.

Πρόβλημα 6 [15 μονάδες] Έστω R μια μεταβατική και ανακλαστική σχέση επί του A . Έστω T μια σχέση επί του A τέτοια ώστε το (a, b) να ανήκει στην T , αν και μόνο αν και το (a, b) και το (b, a) ανήκουν στην R . Δείξτε ότι η T είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Πρόβλημα 7 [15 μονάδες] Μία διμελής σχέση λέγεται *συμβατή* αν είναι ανακλαστική και συμμετρική. Έστω R_1 και R_2 δύο συμβατές σχέσεις επί ενός συνόλου A . Είναι η $R_1 \cap R_2$ μια συμβατή σχέση; Είναι η $R_1 \cup R_2$ μια συμβατή σχέση;

Σύνολο μονάδων: 100