Εξέταση Σεπτεμβρίου – Λύσεις

Διάρκεια: 3 ώρες

Πρόβλημα 1 [30 μονάδες] *Ένα μονοπάτι θα λέγεται γνήσιο μονοπάτι αν ο αρχικός και ο τελικός του κόμβος είναι διαφορετικοί (δηλαδή αν δεν είναι κύκλωμα). Έστω δύο μη κατευθυνόμενα γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$, με $|V_1|, |V_2| \geq 2$. Θεωρήστε το μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, το οποίο ορίζεται ως εξής: $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_c$, όπου*

$$E_c = \{\{u, v\} \,|\, u \in V_1, v \in V_2\}.$$

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α΄) [10 μονάδες] *Αν τα G_1, G_2 έχουν γνήσιο μονοπάτι Hamilton, το G έχει γνήσιο μονοπάτι Hamilton;*

(β΄) [10 μονάδες] *Αν τα G_1, G_2 έχουν γνήσιο μονοπάτι Hamilton, το G έχει κύκλωμα Hamilton;*

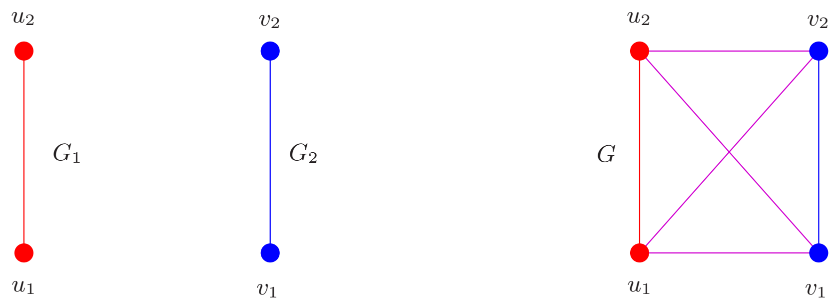
(γ΄) [10 μονάδες] *Αν τα G_1, G_2 έχουν γνήσιο μονοπάτι Euler, το G έχει γνήσιο μονοπάτι Euler;*

Λύση:

(α΄) Έστω $n = |V_1|$ και $m = |V_2|$. Έστω επίσης $u_1, u_2, \ldots, u_n$ το γνήσιο μονοπάτι Hamilton για το γράφημα G_1, και αντίστοιχα $v_1, v_2, \ldots, v_m$ το γνήσιο μονοπάτι Hamilton για το γράφημα G_2. Προφανώς η ακμή $\{u_n, v_1\}$ ανήκει στο σύνολο E_c, καθώς $u_n \in V_1$ και $v_1 \in V_2$. Κατά συνέπεια το μονοπάτι $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι ένα μονοπάτι που περνάει από όλους τους κόμβους του γραφήματος G ακριβώς μία φορά, και επειδή $v_m \neq u_1$, το μονοπάτι αυτό είναι γνήσιο. Συνεπώς ο γράφημα G έχει γνήσιο μονοπάτι Hamilton.

(β΄) Όπως και στο προηγούμενο υποερώτημα, έστω $n = |V_1|$ και $m = |V_2|$, έστω $u_1, u_2, \ldots, u_n$ το γνήσιο μονοπάτι Hamilton για το γράφημα G_1, και αντίστοιχα $v_1, v_2, \ldots, v_m$ το γνήσιο μονοπάτι Hamilton για το γράφημα G_2. Προφανώς οι ακμές $\{u_n, v_1\}$ και $\{v_m, u_1\}$ ανήκουν στο σύνολο E_c, καθώς $u_1, u_n \in V_1$ και $v_1, v_m \in V_2$. Το κύκλωμα $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1$ παιρνάει από κάθε κόμβο του G ακριβώς μία φορά και συνεπώς είναι κύκλωμα Hamilton για το γράφημα G. Άρα το G έχει κύκλωμα Hamilton.

(γ΄) Το κύκλωμα G δεν έχει πάντα μονοπάτι Euler. Θεωρούμε ως γράφημα G_1 το γράφημα $G_1 = (V_1, E_1) = (\{v_1, v_2\}, \{\{v_1, v_2\}\})$ (γράφημα με δύο κορυφές και μία ακμή που τις ενώνει), και ως γράφημα G_2 το γράφημα $G_2 = (V_2, E_2) = (\{u_1, u_2\}, \{\{u_1, u_2\}\})$ (επίσης γράφημα με δύο κορυφές και μία ακμή που τις ενώνει). Τότε το γράφημα G είναι το γράφημα K_4 (πλήρες γράφημα με 4 κορυφές) στο οποίο ο βαθμός και των τεσσάρων κορυφών είναι 3. Προφανώς το $G \equiv K_4$ δεν έχει γνήσιο μονοπάτι Euler γιατί έχει πάνω από δύο κορυφές περιττού βαθμού. Δείτε και το παρακάτω σχήμα για γραφική αναπαράσταση του αντιπαραδείγματος. Το γράφημα G_1 είναι το κόκκινο γράφημα (αριστερά), το γράφημα G_2 είναι το μπλε γράφημα (κέντρο), ενώ στο γράφημα G οι ακμές του συνόλου E_c έχουν μωβ χρώμα (δεξιά).



□

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] *Έστω το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e\}$, και μία διμελής σχέση R επί του A, η οποία ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα. Οι γραμμές δηλώνουν το πρώτο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R, ενώ οι στήλες δηλώνουν το δεύτερο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R (κατά συνέπεια, $(d, a) \in R$, αλλά $(a, d) \notin R$).*

	a	b	c	d	e
a	✓				
b		✓			
c			✓		
d	✓	✓	✓	✓	
e				✓	✓

(α΄) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε τον πίνακα της μεταβατικής θήκης $R^\star$ της R. Δείξτε ότι η $R^\star$ είναι σχέση μερικής διάταξης.*

(β′) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse της $R^\star$.*

(γ′) [5 μονάδες] *Βρείτε διαμέριση του A στον ελάχιστο αριθμό αντιαλυσίδων της $R^\star$.*

(δ′) [5 μονάδες] *Ποιά είναι τα ελάχιστα και μέγιστα στοιχεία της $R^\star$;*

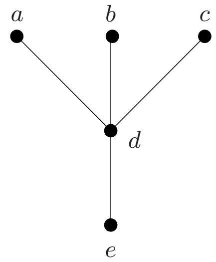
Λύση:

(α′) Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μεταβατική θήκη $R^\star$ της R. Τα στοιχεία της $R^\star$ που δεν ανήκουν στην R εμφανίζονται με μπλε χρώμα, και πρόκειται για τα στοιχεία (e, a), (e, b) και (e, c).

	a	b	c	d	e
a	✓				
b		✓			
c			✓		
d	✓	✓	✓	✓	
e	✓	✓	✓	✓	✓

Η σχέση είναι ανακλαστική γιατί στον παραπάνω πίνακα υπάρχουν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου. Η σχέση είναι αντισυμμετρική, γιατί ο παραπάνω πίνακας είναι κάτω τριγωνικός. Η σχέση είναι μεταβατική από κατασκευής (πρόκειται για τη μεταβατική θήκη μιας διμελούς σχέσης). Άρα η $R^\star$ είναι σχέση μερικής διάταξης.

(β′) Το διάγραμμα Hasse φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(γ′) Ο ελάχιστος αριθμός αντιαλυσίδων είναι 3. Η διαμέριση του A σε 3 αντιαλυσίδες είναι η παρακάτω:

$$\{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$$

(δ′) Το ελάχιστο στοιχείο της $R^\star$ είναι το e, ενώ η $R^\star$ έχει τρία μέγιστα, τα a, b, c.

□

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] *Υπολογίστε τη λύση της παρακάτω αναδρομικής σχέσης, βρίσκοντας πρώτα την ομογενή και την ειδική της λύση:*

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = -15 \cdot 2^{n-1} - 12n + 44, \qquad n \geq 2,$$

με συνοριακές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = -7$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αναδρομικής σχέσης είναι $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, το οποίο έχει λύσεις $\lambda_{1,2} = -2, 3$. Συνεπώς, η ομογενής λύση της αναδρομικής σχέσης είναι η:

$$a_n^{(h)} = A(-2)^n + B3^n,$$

όπου A και B σταθερές που θα προσδιοριστούν παρακάτω από τις συνοριακές συνθήκες.

Για την εύρεση της ειδικής λύσης χωρίζουμε το δεξί μέλος σε δύο κομμάτια και βρίσκουμε για καθένα από αυτά την ειδική λύση. Τα τρία αυτά κομμάτια είναι τα $f_1(n) = -15 \cdot 2^{n-1} = -\frac{15}{2} 2^n$ και $f_2(n) = -12n + 44$. Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στην $f_1(n)$ είναι της μορφής $C \cdot 2^n$. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση βρίσκουμε ότι $C = \frac{15}{2}$. Συνεπώς το πρώτο κομμάτι της ειδικής λύσης είναι $a_n^{(s_1)} = \frac{15}{2} 2^n = 15 \cdot 2^{n-1}$.

Η ειδική λύση που αντιστοιχεί στην $f_2(n)$ είναι της μορφής $Dn + E$. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$-6D = -12$$
$$-6E + 13D = 44$$

λύνοντας το οποίο προκύπτει ότι:

$$D = 2, \qquad E = -3.$$

Συνεπώς το δεύτερο κομμάτι της ειδικής λύσης είναι $a_n^{(s_2)} = 2n - 3$.

Η ολική λύση της αναδρομικής σχέσης είναι:

$$a_n = A(-2)^n + B\,3^n + 15 \cdot 2^{n-1} + 2n - 3.$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = -7$, προκύπτει από την παραπάνω έκφραση ότι

$$\begin{aligned} A + B - 4 + \frac{9}{2} &= 2 \\ -2A + 3B + 14 &= -7 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} A + B &= -\frac{5}{2} \\ -2A + 3B &= -21 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε:

$$A = \frac{27}{10}, \qquad B = -\frac{26}{5},$$

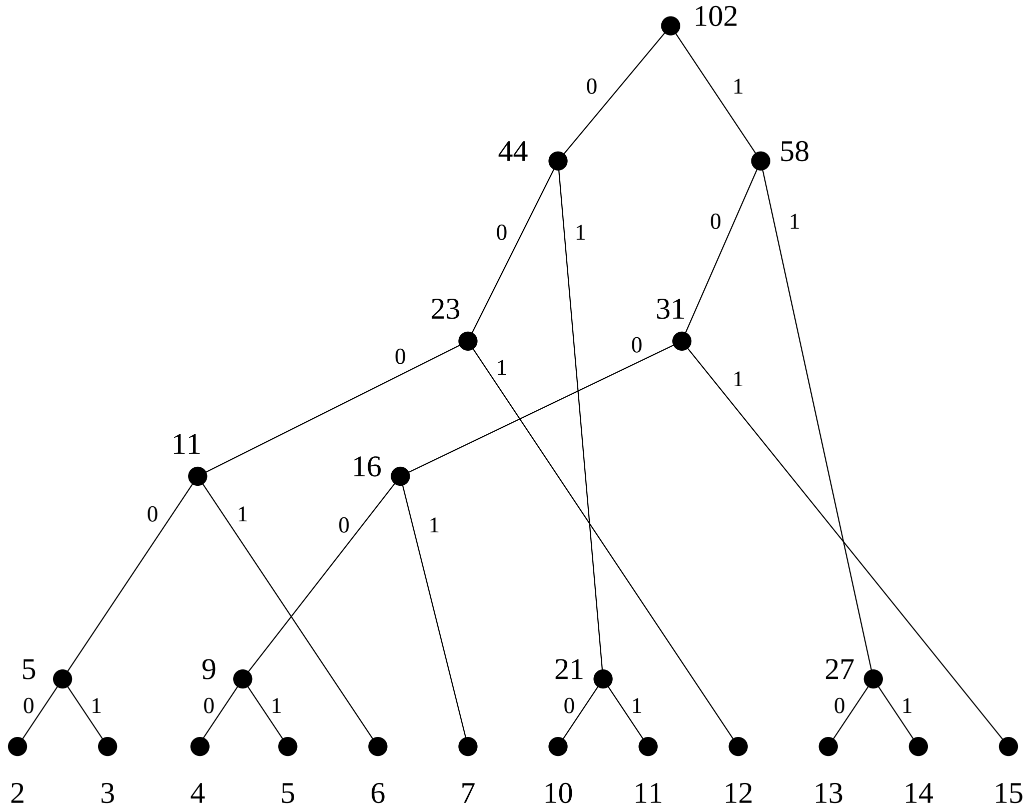
οπότε η λύση της δοσμένης αναδρομικής σχέσης με τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$a_n = \frac{27}{10}(-2)^n - \frac{26}{5}\,3^n + 15 \cdot 2^{n-1} + 2n - 3.$$

□

Πρόβλημα 4 [10 μονάδες] *Για το σύνολο βαρών* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ *κατασκευάστε έναν βέλτιστο δυαδικό κώδικα προθέματος. Για κάθε βάρος του συνόλου, δώστε την αντίστοιχη κωδική λέξη.*

Λύση: Το δυαδικό δέντρο για το δοσμένο σύνολο αριθμών είναι το παρακάτω (το κατασκευάζουμε από κάτω προς τα πάνω).



Οι αντίστοιχες κωδικές λέξεις είναι:

2	00000
3	00001
4	10000

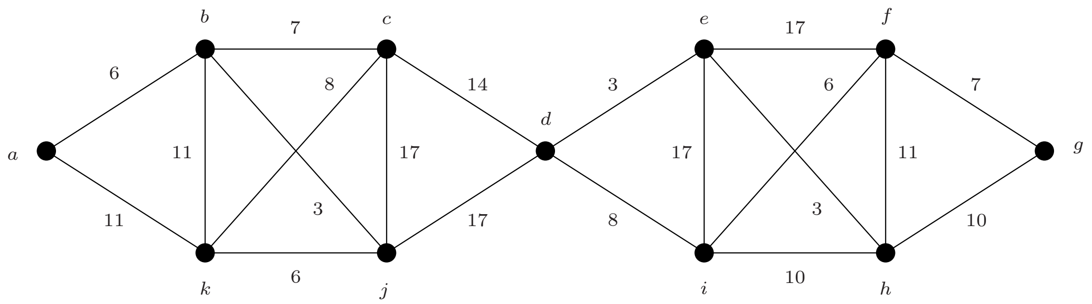
5	10001
6	0001
7	1001

10	010
11	011
12	001

13	110
14	111
15	101

□

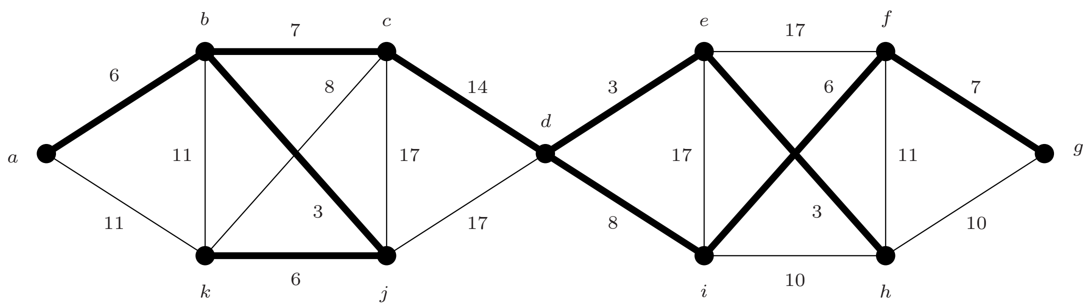
Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] *Προσδιορίστε το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο για το γράφημα του παρακάτω σχήματος. Πιο το βάρος του δέντρου που υπολογίσατε;*



Λύση: Κοιτάμε τις ακμές του γραφήματος σε σειρά αύξοντος βάρους. Επιλέγουμε μία ακμή αν δεν δημιουργεί κύκλωμα και σταματάμε όταν έχουμε επικαλύπτον δέντρο.

Ξεκινάμε από τις ακμές bj, de και eh (βάρος 3), τις οποίες και διαλέγουμε όλες. Κοιτάμε μετά τις ακμές ab, kj και if (βάρος 6), τις οποίες επίσης τις διαλέγουμε όλες. Συνεχίζουμε με τις ακμές bc και fg (βάρος 7), τις οποίες διαλέγουμε επίσης. Οι επόμενες ως προς το βάρος τους ακμές είναι οι ck και di (βάρος 8). Την ck την απορρίπτουμε καθώς δημιουργεί το κύκλωμα $bckjc$, ενώ την di τη δεχόμαστε. Οι επόμενες προς έλεγχο ακμές είναι οι hi και gh (βάρος 10), τις οποίες όμως και απορρίπτουμε γιατί δημιουργούν τα κυκλώματα $dehie$ και $dehgfid$, αντίστοιχα. Συνεχίζουμε με τις ακμές ak, bk και fh (βάρος 11). Όλες όμως απορρίπτονται γιατί δημιουργούν κυκλώματα, και ειδκότερα τα κυκλώματα $abjka$, $bjkb$ και $dehfid$, αντίστοιχα. Η επόμενη ως προς το βάρος της ακμή είναι η ακμή ed (βάρος 14), την οποία και αποδεχόμαστε. Στο σημείο αυτό μπορούμε να σταματήσουμε γιατί έχουμε ήδη δημιουργήσει ένα επικαλύπτον δέντρο, το οποίο σύμφωνα με τη θεωρία είναι ελάχιστο (βλ. και σχήμα παρακάτω, όπου το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο φαίνεται με παχιές ακμές). Το βάρος W του ελαχίστου επικαλύπτοντος δέντρου είναι:

$$W = 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 14 = 63.$$



$\square$

Σύνολο μονάδων: 100