Άσκηση 2 - Λύσεις

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] *Μία διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο η οποία είναι ανακλαστική και συμμετρική ονομάζεται* **συμβατή σχέση**.
Έστω R_1 και R_2 δύο συμβατές σχέσεις πάνω σε κάποιο σύνολο A.

(α') [10 μονάδες] *Είναι η $R_1 \cap R_2$ μια συμβατή σχέση;*

(β') [10 μονάδες] *Είναι η $R_1 \cup R_2$ μια συμβατή σχέση;*

Λύση: Η απάντηση είναι ότι τόσο η σχέση $R_1 \cap R_2$ όσο και η σχέση $R_1 \cup R_2$ είναι συμβατές σχέσεις. Παρακάτω δίδονται οι αποδείξεις.

(α') Έστω $a \in A$. Επειδή τόσο η R_1 όσο και η R_2 είναι ανακλαστικές σχέσεις, θα έχουμε $(a,a) \in R_1$, $(a,a) \in R_2$. Συνεπώς $(a,a) \in R_1 \cap R_2$, δηλαδή η $R_1 \cap R_2$ είναι ανακλαστική σχέση.
Έστω $a, b \in A$, και έστω $(a,b) \in R_1 \cap R_2$. Τότε $(a,b) \in R_1$ και $(a,b) \in R_2$. Αλλά τόσο η R_1 όσο και η R_2 είναι συμμετρικές σχέσεις, οπότε $(b,a) \in R_1$ και $(b,a) \in R_2$. Κατά συνέπεια, $(b,a) \in R_1 \cap R_2$, δηλαδή η $R_1 \cap R_2$ είναι συμμετρική σχέση. Καθ' όσον η $R_1 \cap R_2$ είναι ανακλαστική και συμμετρική, είναι συμβατή σχέση.

(β') Έστω $a \in A$. Επειδή η R_1 είναι ανακλαστική σχέση, έχουμε $(a,a) \in R_1$, όποτε και $(a,a) \in R_1 \cup R_2$, δηλαδή η $R_1 \cup R_2$ είναι ανακλαστική σχέση.
Έστω $a, b \in A$, και έστω $(a,b) \in R_1 \cup R_2$. Τότε $(a,b) \in R_1$ ή $(a,b) \in R_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $(a,b) \in R_1$. Επειδή η R_1 είναι συμμετρική σχέση, θα έχουμε $(b,a) \in R_1$. Κατά συνέπεια, $(b,a) \in R_1 \cup R_2$, δηλαδή η $R_1 \cup R_2$ είναι συμμετρική σχέση. Καθ' όσον η $R_1 \cup R_2$ είναι ανακλαστική και συμμετρική, είναι συμβατή σχέση.

$\square$

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] *Είναι η μεταβατική θήκη μιας αντισυμμετρικής σχέσης πάντα αντισυμμετρική;*

Λύση: Η απάντηση είναι αρνητική. Θα δείξουμε ότι η μεταβατική θήκη μιας αντισυμμετρικής σχέσης μπορεί να μην είναι αντισυμμετρική με ένα αντιπαράδειγμα.

Θεωρείστε το σύνολο $A = \{a, b, c\}$ και θεωρείστε τη διμελή σχέση R επί του A που ορίζεται ως εξής:

$$R = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}.$$

Παρατηρούμε ότι η R είναι αντισυμμετρική. Η μεταβατική επέκταση R_1 της R είναι η:

$$R_1 = R \cup \{(a,c), (b,a), (c,b)\} = \{(a,b), (b,c), (c,a), (a,c), (b,a), (c,b)\}.$$

Επειδή $R_1 \subseteq R^*$, όπου R^* η μεταβατική θήκη της R, παρατηρούμε ότι $(a,b), (b,a) \in R^*$. Συνεπώς η R^* δεν μπορεί να είναι αντισυμμετρική. $\square$

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] *Έστω το σύνολο $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, και μία διμελής σχέση R επί του A, η οποία ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα. Οι γραμμές δηλώνουν το πρώτο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R, ενώ οι στήλες δηλώνουν το δεύτερο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην R (κατά συνέπεια, $(a, c) \in R$, αλλά $(c, a) \notin R$).*

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	✓		✓			✓	✓	
b		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
c			✓			✓	✓	
d				✓		✓	✓	✓
e					✓			✓
f						✓		
g							✓	
h								✓

(α΄) [5 μονάδες] *Αποδείξτε ότι η R είναι σχέση μερικής διάταξης.*

(β΄) [5 μονάδες] *Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse της R.*

(γ΄) [2 μονάδες] *Ποιά είναι τα ελάχιστα και μέγιστα στοιχεία της R;*

(δ΄) [3 μονάδες] *Είναι η R δικτυωτό;*

(ε΄) [2 μονάδες] *Ποιό το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας της R;*

(ϛ΄) [3 μονάδες] *Αν μ το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας της R, βρείτε μια διαμέριση του A σε μ αντιαλυσίδες.*

Λύση:

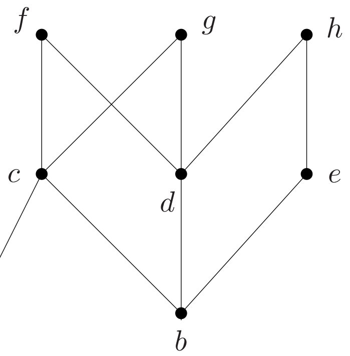
(α΄) Παρατηρούμε ότι για κάθε x στο A, το (x, x) ανήκει στην R (όλα τα διαγώνια στοιχεία στον πίνακα είναι μαρκαρισμένα). Κατά συνέπεια η R είναι ανακλαστική.
Παρατηρούμε επίσης ότι αν για κάποια $x, y \in A$, $x \neq y$, τέτοια ώστε το $(x, y) \in R$, το $(y, x) \notin R$ (στον πίνακα αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι αν κάποιο στοιχείο εκτός της διαγωνίου είναι μαρκαρισμένο, το συμμετρικό του ως προς τη διαγώνιο δεν είναι μαρκαρισμένο). Συνεπώς η R είναι αντισυμμετρική.
Τέλος θα δείξουμε ότι η R είναι μεταβατική. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε δυνατή τριάδα x, y, z στοιχείων του A, με $(x, y), (y, z) \in R$, και το $(x, z) \in R$. Στους παρακάτω πίνακες αναγράφονται όλες αυτές οι δυνατές τριάδες και παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το $(x, z) \in R$.

x	y	z	$(x,z) \in R$?
a	a	c	Ναι
a	a	f	Ναι
a	a	g	Ναι
b	b	c	Ναι
b	b	d	Ναι
b	b	e	Ναι
b	b	f	Ναι
b	b	g	Ναι
b	b	h	Ναι
c	c	f	Ναι
c	c	g	Ναι
d	d	f	Ναι
d	d	g	Ναι
d	d	h	Ναι
e	e	h	Ναι

x	y	z	$(x,z) \in R$?
a	c	c	Ναι
a	f	f	Ναι
a	g	g	Ναι
b	c	c	Ναι
b	d	d	Ναι
b	e	e	Ναι
b	f	f	Ναι
b	g	g	Ναι
b	h	h	Ναι
c	f	f	Ναι
c	g	g	Ναι
d	f	f	Ναι
d	g	g	Ναι
d	h	h	Ναι
e	h	h	Ναι

x	y	z	$(x,z) \in R$?
a	c	f	Ναι
a	c	g	Ναι
b	c	f	Ναι
b	c	g	Ναι
b	d	f	Ναι
b	d	g	Ναι
b	d	h	Ναι
b	e	h	Ναι

(β′) Το διάγραμμα Hasse της R φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(γ′) Τα ελάχιστα στοιχεία της R είναι τα a και b, ενώ τα μέγιστα στοιχεία της R είναι τα f, g και h.

(δ′) Η R δεν είναι δικτυωτό. Για παράδειγμα, τα f και g έχουν δύο μέγιστα κάτω φράγματα, τα c και d.

(ε′) Το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας της R είναι 3 (π.χ. η αλυσίδα $\{b, d, h\}$).

(ϛ′) Η ζητούμενη διαμέριση είναι η $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g, h\}\}$.

$\square$

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] *Από τους ακεραίους 1–200, διαλέγονται αυθαίρετα 101 από αυτούς. Δείξτε ότι ανάμεσα στους επιλεγμένους ακεραίους υπάρχουν δύο που είναι τέτοιοι, ώστε ο ένας να διαιρεί τον άλλο.*

Λύση: Ας ονομάσουμε A το σύνολο των ακεραίων από 1 ως 200, δηλαδή, $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 200\}$. Έστω C το σύνολο των 101 ακεραίων που διαλέγουμε αυθαίρετα. Θεωρούμε τα σύνολα A_i, $1 \leq i \leq 100$, τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A_i = \{2^{k_i}\,(2i-1) \,|\, k_i \geq 0 \text{ και } 2^{k_i}(2i-1) \leq 200\},$$

και έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των συνόλων A_i, δηλαδή, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}\}$. Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι το $\mathcal{A}$ είναι μία *διαμέριση* του A.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $\cup_{i=1}^{100} A_i = A$. Πράγματι, έστω $x \in A$. Θεωρήστε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$\boxed{x \text{ περιττός}}$ Τότε υπάρχει k, με $1 \leq k \leq 100$, τέτοιος ώστε $x = 2k - 1$. Στη περίπτωση αυτή, το x ανήκει στο σύνολο A_k.

$\boxed{x \text{ άρτιος}}$ Τότε το x είτε είναι δύναμη του 2 είτε είναι το γινόμενο κάποιας δύναμης του 2 με κάποιον περιττό μεγαλύτερο του 1. Στην πρώτη περίπτωση το x ανήκει στο A_1, καθώς το A_1 περιέχει όλες τις δυνάμεις του 2 που είναι μικρότερες από 200. Στη δεύτερη περίπτωση έστω ότι $x = 2^m(2\lambda - 1)$, όπου $m > 1$ και $1 \leq \lambda \leq 100$. Τότε ο x ανήκει στο σύνολο A_λ, καθώς το A_λ περιέχει τον περιττό $2\lambda - 1$, καθώς και όλα τα πολλαπλάσια του με δυνάμεις του 2 που είναι το πολύ 200.

Άρα σε κάθε περίπτωση το x ανήκει σε κάποιο από τα A_i, οπότε και στην ένωση $\cup_{i=1}^{100} A_i$. Συνεπώς έχουμε $A \subseteq \cup_{i=1}^{100} A_i$. Από την άλλη μεριά $A_i \subseteq A$, οπότε και $\cup_{i=1}^{100} A_i \subseteq A$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $\cup_{i=1}^{100} A_i = A$.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα σύνολα A_i είναι ανά δύο ξένα. Όντως, έστω ότι υπάρχουν A_j και A_k, με $A_j \cap A_k \neq \emptyset$. Έστω $x \in A_j \cap A_k$. Αν το x είναι περιττός τότε δεν μπορεί να ανήκει και στα δύο γιατί ο μόνος περιττός στο A_j είναι ο $2j - 1$, ενώ ο μόνος περιττός στο A_k είναι ο $2k - 1$, οι οποίοι δεν είναι ίσοι. Καταλήγουμε, λοιπόν, στην περίπτωση αυτή σε άτοπο. Αν το x είναι άρτιος τότε και ο $x/2$ θα ανήκει και στο $A_j \cap A_k$. Ομοίως, αν ο $x/2$ είναι άρτιος, τότε και ο $x/2^2$ θα ανήκει στο $A_j \cap A_k$. Γενικότερα, αν $m \geq 1$ η μέγιστη δύναμη του 2 που διαιρεί τον x, τότε ο $x/2^m$ θα ανήκει στο $A_j \cap A_k$. Αλλά ο $x/2^m$ είναι περιττός αριθμός και ανήκει τόσο στο A_j όσο και στο A_k. Αυτό όμως είναι αδύνατο καθώς ο μοναδικός περιττός στο A_j είναι ο $2j - 1$, ο μοναδικός περιττός στο A_k είναι ο $2k - 1$, και $2j - 1 \neq 2k - 1$. Εδώ τελειώνει η απόδειξη ότι το $\mathcal{A}$ είναι μία διαμέριση του A.

Αν $x \in A$, τότε θα συμβολίζω με A_x το (μοναδικό) σύνολο στο $\mathcal{A}$ που περιέχει το x. Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση f από το C στο $\mathcal{A}$, η οποία απεικονίζει το x στο $f(x) = A_x$. Παρατηρούμε ότι $|C| = 101$, αλλά $|\mathcal{A}| = 100$. Σύμφωνα, λοιπόν με την αρχή του περιστερώνα, υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να θεωρήσω ότι $x_1 < x_2$. Αυτό σημαίνει όμως ότι τόσο το x_1 όσο και το x_2 ανήκουν στο ίδιο σύνολο A_i (για κατάλληλο i). Αλλά στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $x_2 = 2^\ell x_1$ για κάποιο $\ell \geq 1$, που σημαίνει ότι το x_2 είναι πολλαπλάσιο του x_1, ή ισοδύναμα ότι το x_1 διαιρεί το x_2. $\square$

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] *Δείξτε ότι ανάμεσα σε $n+1$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους υπάρχουν δύο που η διαφορά τους να διαιρείται από το n.*

Λύση: Έστω $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n+1$ αυθαίρετοι ακέραιοι, και θα ονομάζουμε A το σύνολό τους. Έστω $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ σύνολο n ακεραίων όπου $b_i = a_i - a_0$, $1 \leq i \leq n$.

Ας υποθέσουμε ότι μεταξύ των στοιχείων του A δεν υπάρχουν δύο ακέραιοι η διαφορά των οποίων να διαιρείται με το n. Ας ορίσουμε τη συνάρτηση $f : B \to \mathbb{R}$, όπου $f(x) = x \mod n$. Δεδομένης της υπόθεσής μας, η εικόνα στοιχείων του B μέσω της f δεν μπορεί να είναι 0. Συνεπώς $f(B) = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, δηλαδή $|f(B)| \leq n-1$. Επειδή $|B| = n > |f(B)|$, και χρησιμοποιώντας την αρχή του περιστερώνα, προκύπτει ότι υπάρχουν $b_\mu, b_\nu \in B$ τέτοια ώστε $f(b_\mu) = f(b_\nu)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ και $r \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ τέτοιοι ώστε $b_\mu = k_1 n + r$ και $b_\nu = k_2 n + r$. Τότε όμως

$$b_\mu - b_\nu = (a_\mu - a_0) - (a_\nu - a_0) = a_\mu - a_\nu = (k_1 n + r) - (k_2 n + r) = (k_1 - k_2)n,$$

δηλαδή βρίκαμε δύο στοιχεία του A, τα a_μ και a_ν, των οποίων η διαφορά διαιρείται από το n το οποίο αντιβαίνει την υπόθεσή μας (δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο). Κατά συνέπεια η υπόθεσή μας δεν ισχύει και, πάντα μεταξύ των $n+1$ αυθαίρετων επιλεγμένων ακεραίων μπορούμε να βρούμε δύο που η διαφορά τους να διαιρείται από το n. $\square$