

## Άσκηση 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Νοεμβρίου 2006

### Σημειώσεις:

1. Στις απαντήσεις που θα παραδώσετε σημειώστε στην πρώτη σελίδα το ονοματεπώνυμό σας, τον αριθμό μητρώου σας και το τμήμα σας.
2. Οι ασκήσεις πρέπει να γίνουν ατομικά. Οποιαδήποτε μορφή αντιγραφής απαγορεύεται.
3. Η παρούσα άσκηση πρέπει να παραδοθεί το αργότερο μέχρι την αρχή του μαθήματος της 16ης Νοεμβρίου, δηλαδή μέχρι τις 13:15. Καθυστερημένες ασκήσεις δε θα γίνουν δεκτές.
4. Σε περίπτωση που έχετε ερωτήσεις στείλτε email στην ηλεκτρονική λίστα του μαθήματος: [em201-list@tem.uoc.gr](mailto:em201-list@tem.uoc.gr)

**Πρόβλημα 1 [20 μονάδες]** Μία διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο η οποία είναι ανακλαστική και συμμετρική ονομάζεται *συμβατή σχέση*.

Έστω  $R_1$  και  $R_2$  δύο συμβατές σχέσεις πάνω σε κάποιο σύνολο  $A$ .

(α') [10 μονάδες] Είναι η  $R_1 \cap R_2$  μια συμβατή σχέση;

(β') [10 μονάδες] Είναι η  $R_1 \cup R_2$  μια συμβατή σχέση;

**Πρόβλημα 2 [20 μονάδες]** Είναι η μεταβατική θήκη μιας αντισυμμετρικής σχέσης πάντα αντισυμμετρική;

**Πρόβλημα 3 [20 μονάδες]** Έστω το σύνολο  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ , και μία διμελής σχέση  $R$  επί του  $A$ , η οποία ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα. Οι γραμμές δηλώνουν το πρώτο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην  $R$ , ενώ οι στήλες δηλώνουν το δεύτερο στοιχείο των διατεταγμένων ζευγών στην  $R$  (κατά συνέπεια,  $(a, c) \in R$ , αλλά  $(c, a) \notin R$ ).

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$a$	✓		✓			✓	✓	
$b$		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$c$			✓			✓	✓	
$d$				✓		✓	✓	✓
$e$					✓			✓
$f$						✓		
$g$							✓	
$h$								✓

- (α') [5 μονάδες] Αποδείξτε ότι η  $R$  είναι σχέση μερικής διάταξης.  
 (β') [5 μονάδες] Κατασκευάστε το διάγραμμα Hasse της  $R$ .  
 (γ') [2 μονάδες] Ποιά είναι τα ελάχιστα και μέγιστα στοιχεία της  $R$ ;  
 (δ') [3 μονάδες] Είναι η  $R$  δικτυωτό;  
 (ε') [2 μονάδες] Ποιό το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας της  $R$ ;  
 (ϛ') [3 μονάδες] Αν  $\mu$  το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας της  $R$ , βρείτε μια διαμέριση του  $A$  σε  $\mu$  αντιαλυσίδες.

**Πρόβλημα 4 [20 μονάδες]** Από τους ακεραίους 1–200, διαλέγονται αυθαίρετα 101 από αυτούς. Δείξτε ότι ανάμεσα στους επιλεγμένους ακεραίους υπάρχουν δύο που είναι τέτοιιοι, ώστε ο ένας να διαιρεί τον άλλο.

**Πρόβλημα 5 [20 μονάδες]** Δείξτε ότι ανάμεσα σε  $n+1$  αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους υπάρχουν δύο που η διαφορά τους να διαιρείται από το  $n$ .

Σύνολο μονάδων: 100