

Άσκηση 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 31 Οκτωβρίου 2012

Πρόβλημα 1 [20 μονάδες] Θεωρήστε τα παρακάτω τρία επίπεδα:

$$\begin{aligned}(\Pi_1) \quad & 3x + 5y + z = 0 \\(\Pi_2) \quad & 2x - z + 4 = 0 \\(\Pi_3) \quad & -3x + 6y + 7z - 3 = 0\end{aligned}$$

(α') [10 μονάδες] Δείξτε ότι ανά δύο τα επίπεδα αυτά δεν είναι παράλληλα.

(β') [10 μονάδες] Βρείτε το σημείο του χώρου που ανήκει και στα τρία επίπεδα.

Πρόβλημα 2 [20 μονάδες] Θεωρήστε τα παρακάτω δύο επίπεδα:

$$\begin{aligned}(\Pi_1) \quad & x - 3y + z + 5 = 0 \\(\Pi_2) \quad & -2x + 6y - 2z + 10 = 0\end{aligned}$$

(α') [10 μονάδες] Δείξτε ότι τα επίπεδα (Π_1) και (Π_2) είναι παράλληλα.

(β') [10 μονάδες] Βρείτε, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

Πρόβλημα 3 [20 μονάδες] Θεωρήστε τα επίπεδα:

$$\begin{aligned}(\Pi_1) \quad & x + y + z - 3 = 0 \\(\Pi_2) \quad & -2x + 5y + 4 = 0\end{aligned}$$

(α') [10 μονάδες] Βρείτε, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τις εξισώσεις της ευθείας (ε) που προκύπτει ως τομή των δύο επιπέδων.

(β') [10 μονάδες] Βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας (ε') που είναι κάθετη στην (ε) , ανήκει στο επίπεδο (Π_1) και περνάει από το σημείο $(1, 1, 1)$.

Πρόβλημα 4 [20 μονάδες] Θεωρήστε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) στο επίπεδο. Ως διχοτόμο των δύο ευθειών ορίζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις δύο ευθείες. Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε η διχοτόμος τους είναι μία ευθεία που βρίσκεται στο εσωτερικό της λωρίδας που ορίζουν και σε ίση απόσταση από αυτές. Αν οι δύο ευθείες τέμνονται η διχοτόμος είναι οι δύο ευθείες που διέρχονται από το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) και διχοτομούν τις δύο γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες.

Έστω ότι σας δίνονται οι εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2) στην παρακάτω μορφή:

$$(\varepsilon_1) \quad \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{v_1}, \quad (\varepsilon_2) \quad \frac{x - x_2}{u_2} = \frac{y - y_2}{v_2},$$

όπου $u_1 v_1 u_2 v_2 \neq 0$ βρείτε την εξίσωση της μίας διχοτόμου ευθείας αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, ή των δύο διχοτόμων ευθειών αν οι δύο ευθείες δεν είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 5 [20 μονάδες] Θεωρήστε τρεις ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) στο επίπεδο, των οποίων οι εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1) \quad & \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, & |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0 \\(\varepsilon_2) \quad & \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, & |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0 \\(\varepsilon_3) \quad & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0, & |\alpha_3| + |\beta_3| \neq 0\end{aligned}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι ευθείες αυτές δεν είναι ανά δύο παράλληλες, ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές των τριών ευθειών ώστε αυτές να διέρχονται από το ίδιο σημείο;

Σύνολο μονάδων: 100