Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι: Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big), \quad a \leq t \leq b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη α$y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (1).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε

  y^i την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^i \approx y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Υψηλής τάξης πολυβηματικές μέθοδοι

Σε αυτήν την παράγραφο θα εισαγάγουμε μια δεύτερη κατηγορία μεθόδων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, τις λεγόμενες πολυβηματικές μεθόδους. Ακριβέστερα, θα ασχοληθούμε με τις *γραμμικές* πολυβηματικές μεθόδους.

Θεωρούμε πάλι το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών: Ζητείται συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

με δεδομένο $y_0 \in \mathbb{R}^m$ και $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ και $t^n := a + nh$, $n = 0, \ldots, N$. Χάριν συντομίας, θα γράφουμε στη συνέχεια f^k αντί $f(t^k, y^k)$. Βασικές αρχές:

- προσεγγίσεις ενδιάμεσων σημείων του $[t^n, t^{n+1}]$
- κανόνες ολοκλήρωσης υψηλής τάξης
- *συνδυασμός ενδιάμεσων προσεγγίσεων με τους κανόνες ολοκλήρωσης υψηλής τάξης* για την κατασκευή της προσέγγισης y^{n+1} υψηλής τάξης ακρίβειας.

Πολυβηματικές μέθοδοι: κατασκευή / παραδείγματα

Ένα παράδειγμα πολυβηματικής (διβηματικής) μεθόδου είναι το σχήμα

$$\begin{aligned} &y^0, y^1 \quad \text{δεδομένα}, \\ &y^{n+2} - y^n = 2hf^{n+1}, \quad n = 0, \ldots, N-2, \end{aligned} \tag{3}$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε την μέθοδο (3) προσεγγίζοντας την $y'(t^{n+1})$ με το πηλίκο διαφορών $\frac{y(t^{n+2})-y(t^n)}{2h}$.

Πολυβηματικές μέθοδοι: κατασκευή / παραδείγματα

Μια άλλη χρήσιμη τεχνική κατασκευής πολυβηματικών μεθόδων είναι η αριθμητική ολοκλήρωση. Ολοκληρώνοντας, τη Δ.Ε. $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ στο διάστημα $[t^n, t^{n+2}]$ έχουμε

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

Προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος αυτής της σχέσης με τον τύπο του μέσου, οδηγούμαστε πάλι στη μέθοδο (3).
Προσεγγίζοντας το ίδιο ολοκλήρωμα με τον κανόνα του Simpson, παίρνουμε τη διβηματική μέθοδο

$$\begin{aligned} &y^0, y^1 \quad \text{δεδομένα}, \\ &y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\big(f^{n+2} + 4f^{n+1} + f^n\big), \quad n = 0, \dots, N-2, \end{aligned} \tag{4}$$

η οποία, για προφανείς λόγους, λέγεται *μέθοδος του Simpson*. Η μέθοδος του Simpson είναι *πεπλεγμένη*, αφού για τον προσδιορισμό του y^{n+2} απαιτείται σε κάθε βήμα η επίλυση ενός $m \times m$ μη γραμμικού συστήματος. Αντίθετα, η μέθοδος (3) είναι *άμεση*.

Πολυβηματικές μέθοδοι: γενική μορφή

Γενικά μια (γραμμική) *k−βηματική* μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (2) περιγράφεται από $2k+2$ σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\beta_0, \dots, \beta_k$, και είναι της μορφής

$$\begin{aligned} & y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\ & \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = h\big(\beta_k f^{n+k} + \dots + \beta_0 f^n\big), \\ & \qquad n = 0, \dots, N-k. \end{aligned} \tag{5}$$

Θα υποθέτουμε συνήθως ότι $\alpha_k = 1$ και ότι $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, έτσι ώστε να έχουμε πράγματι μια $k-$βηματική μέθοδο.

Πολυβηματικές μέθοδοι: γενική μορφή / ύπαρξη προσεγγίσεων

Αν $\beta_k = 0$, η μέθοδος θα λέγεται *άμεση*: Ο προσδιορισμός του y^{n+k} γίνεται με απλή αντικατάσταση των γνωστών τιμών $y^{n+i}, i = 0, \dots, k-1.$
Αν $\beta_k \neq 0$, η μέθοδος θα λέγεται *πεπλεγμένη*: Για τον προσδιορισμό του y^{n+k} απαιτείται η επίλυση ενός $m \times m$ μη γραμμικού συστήματος της μορφής

$$y^{n+k} = h\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n,$$

με γνωστό g^n. Αν L είναι η σταθερά Lipschitz της f ως προς τη μεταβλητή y, και $h|\beta_k|L < 1$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, το y^{n+k} ορίζεται μονοσήμαντα. Επίσης, στην περίπτωση που οι συντελεστές α_k και β_k είναι ομόσημοι και η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, μπορούμε να αποδείξουμε, όπως ακριβώς στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler, ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς να απαιτείται κάποιος περιορισμός στο βήμα h.

Πολυβηματικές μέθοδοι: παρατηρήσεις

- Οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι πολύ λιγότερο δαπανηρές από τις μεθόδους των Runge–Kutta.
- Στις άμεσες πολυβηματικές μεθόδους απαιτείται σε κάθε βήμα ένας υπολογισμός της f (οι υπόλοιποι υπολογισμοί έχουν γίνει ήδη σε προηγούμενα βήματα).
- Στις πεπλεγμένες απαιτείται επιπρόσθετα η επίλυση ενός $m \times m$ μη γραμμικού συστήματος (σε αντιδιαστολή προς τις μεθόδους των Runge–Kutta, όπου το σύστημα είναι $qm \times qm$).
- Οι (πεπλεγμένες) μέθοδοι των Runge–Kutta παρουσιάζουν όμως σαφή πλεονεκτήματα σε σχέση με τις πολυβηματικές μεθόδους, γιατί συνδυάζουν υψηλή ακρίβεια με καλές ιδιότητες ευστάθειας.
- Οι αρχικές τιμές $y^0, \dots, y^{k-1}$ που απαιτούνται για την εκκίνηση μιας $k-$βηματικής μεθόδου υπολογίζονται συνήθως από τη δεδομένη αρχική τιμή y^0 μέσω μεθόδων των Runge–Kutta.

Πολυβηματικές μέθοδοι: παρατηρήσεις

- Οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι πολύ λιγότερο δαπανηρές από τις μεθόδους των Runge–Kutta.
- Στις άμεσες πολυβηματικές μεθόδους απαιτείται σε κάθε βήμα ένας υπολογισμός της f (οι υπόλοιποι υπολογισμοί έχουν γίνει ήδη σε προηγούμενα βήματα).
- Στις πεπλεγμένες απαιτείται επιπρόσθετα η επίλυση ενός $m \times m$ μη γραμμικού συστήματος (σε αντιδιαστολή προς τις μεθόδους των Runge–Kutta, όπου το σύστημα είναι $qm \times qm$).
- Οι (πεπλεγμένες) μέθοδοι των Runge–Kutta παρουσιάζουν όμως σαφή πλεονεκτήματα σε σχέση με τις πολυβηματικές μεθόδους, γιατί συνδυάζουν υψηλή ακρίβεια με καλές ιδιότητες ευστάθειας.
- Οι αρχικές τιμές $y^0, \dots, y^{k-1}$ που απαιτούνται για την εκκίνηση μιας $k-$βηματικής μεθόδου υπολογίζονται συνήθως από τη δεδομένη αρχική τιμή y^0 μέσω μεθόδων των Runge–Kutta.

Σημαντικό Παράδειγμα : Μέθοδοι Ανάδρομων Διαφορών

Έστω $P_{n,k}$ το πολυώνυμο βαθμού το πολύ k τέτοιο ώστε

$$P_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i}), \quad i = 0, \dots, k,$$

δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που παρεμβάλλεται στις τιμές $y(t^{n+i}), 0 \leqslant i \leqslant k$. Αν στη σχέση $y'(t^{n+k}) = f\big(t^{n+k}, y(t^{n+k})\big)$ προσεγγίσουμε την $y'(t^{n+k})$ με την παράγωγο του πολυωνύμου στο ίδιο σημείο, $P'_{n,k}(t^{n+k})$, και υπολογίσουμε την τελευταία συναρτήσει των τιμών $y(t^{n+i})$, $0 \leqslant i \leqslant k$, οδηγούμαστε στη μέθοδο

$$\begin{aligned} & y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\ & \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = hf^{n+k}, \quad n = 0, \dots, N-k, \end{aligned} \tag{6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον συνήθη συμβολισμό $\nabla^1 y^n := y^n - y^{n-1}$, $\nabla^j y^n := \nabla^1(\nabla^{j-1} y^n)$ του λογισμού διαφορών.

Σημαντικό Παράδειγμα : Μέθοδοι Ανάδρομων Διαφορών (BDF) / συνέχεια

η (6) είναι μια $k-$βηματική μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για συστήματα Δ.Ε. Η (6) λέγεται μέθοδος *ανάδρομων διαφορών με k βήματα*. Για $k = 1, 2, 3, \ldots,$ γράφεται στη μορφή (5) ως εξής:

$$k = 1: \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 = -1, \qquad \beta_1 = 1 \qquad \text{(πεπλεγμένη Euler)}$$

$$k = 2: \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{4}{3}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{3}, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}$$

$$k = 3: \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{18}{11}, \quad \alpha_1 = \frac{9}{11}, \quad \alpha_0 = -\frac{2}{11}, \quad \beta_3 = \frac{6}{11}$$

κ.ο.κ. Σημειώνουμε ακόμη ότι πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό, έτσι ώστε $\beta_k = 1$, βλ. την (6), τα $\alpha_j, j = 0, \ldots, k$, είναι οι συντελεστές των $\zeta^j, j = 0, \ldots, k$, του πολυωνύμου α,

$$\alpha(\zeta) := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \zeta^{k-i} (\zeta - 1)^i.$$

Ανάλυση Πολυβηματικών Μεθόδων

- Επιλυσιμότητα (οι προσεγγίσεις είναι καλώς ορισμένες)
- Ευστάθεια
- Συνέπεια
- Σύγκλιση

Επιλυσιμότητα Πολυβηματικών Μεθόδων

- Αν $\beta_k = 0$, η μέθοδος θα λέγεται *άμεση*: Ο προσδιορισμός του y^{n+k} γίνεται με απλή αντικατάσταση των γνωστών τιμών $y^{n+i}, i = 0, \dots, k-1$.
- Αν $\beta_k \neq 0$, η μέθοδος είναι *πεπλεγμένη*:
- Για τον προσδιορισμό του y^{n+k} απαιτείται η επίλυση ενός $m \times m$ μη γραμμικού συστήματος της μορφής

  $$y^{n+k} = h\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n,$$

  με γνωστό g^n.
- Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την ΟΣ-Lipschitz

  $$\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq L |y_1 - y_2|. \tag{7}$$

Πρόταση 1

(Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων .) Υποθέτουμε ότι η (7)ικανοποιείται, και έστω $h|\beta_k|L < 1$. Τότε το το y^{n+k} ορίζεται μονοσήμαντα.

Επιλυσιμότητα Πολυβηματικών Μεθόδων II

- Επίσης, στην περίπτωση που οι συντελεστές α_k και β_k είναι ομόσημοι και η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, μπορούμε να αποδείξουμε, όπως ακριβώς στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler, ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς να απαιτείται κάποιος περιορισμός στο βήμα h.

Ευστάθεια (Βασική Ευστάθεια)

Ορισμός

(Ευστάθεια Πολυβηματικών Μεθόδων.) Θα λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής, αν

- *για κάθε ΠΑΤ στο οποίο η f ικανοποιεί την ΟΣ- Lipschitz*
- *και δυο ακολουθίες προσεγγίσεων $y^0, \dots, y^N$, $z^0, \dots, z^N$, οι οποίες παράγονται από την ίδια πολυβηματική μέθοδο αλλά, γενικά, με διαφορετικές αρχικές τιμές , $y^0, \dots, y^{k-1}$ και $z^0, \dots, z^{k-1}$,*

ισχύει

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |y^j - z^j|. \tag{8}$$

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Οι ομογενείς γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι της μορφής

$$\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = 0, \quad n \geqslant 0, \tag{9}$$

όπου $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ δεδομένοι αριθμοί.

- Λέμε ότι η εξίσωση (9) έχει σταθερούς συντελεστές, γιατί οι συντελεστές $\alpha_k, \ldots, \alpha_0$ δεν εξαρτώνται από το n.
- Κάθε ακολουθία $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$, η οποία πληροί την (9), λέγεται λύση της.
- Υποθέτουμε στο εξής, προφανώς χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι οι αριθμοί α_k και α_0 είναι διάφοροι του μηδενός.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών II

- Ο χώρος λύσεων της (9) είναι γραμμικός χώρος, δηλαδή αν $\left(y_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left(y_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ είναι δύο λύσεις της και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, τότε και η $\left(\alpha y_1^n + \beta y_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι λύση της.
- Θα δείξουμε παρακάτω ότι η διάσταση του χώρου λύσεων της (9) είναι k.
- Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα $y^0, \dots, y^{k-1}$, υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (με πρώτες k συνιστώσες αυτές που έχουμε προκαθορίσει), η οποία είναι λύση της (9).
- Έστω $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j = 1, \dots, m$, λύσεις της (9). Λέμε ότι αυτές οι λύσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες, αν υπάρχουν σταθερές $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{C}$, όχι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε

$$\gamma_1 y_1^n + \cdots + \gamma_m y_m^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Αν οι λύσεις αυτές δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες, λέμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών III

- Θεωρούμε τώρα τις εξής λύσεις $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}, j = 0, \dots, k-1$, της (9): Οι αρχικές τιμές των $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι τέτοιες ώστε $y_j^m = \delta_{jm}, j, m = 0, \dots, k-1$.
- Είναι προφανές ότι αυτές οι λύσεις της (9) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- Επίσης, κάθε λύση $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ της (9) γράφεται στη μορφή

$$y^n = y^0 y_0^n + \cdots + y^{k-1} y_{k-1}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

  Πράγματι, και τα δύο μέλη αυτής της ισότητας δίνουν ακολουθίες, οι οποίες είναι λύσεις της (9) και οι πρώτες k συνιστώσες τους είναι ίδιες. Επειδή το πρόβλημα λύνεται μονοσήμαντα, όταν προκαθορίσουμε τις k πρώτες συνιστώσες, οι λύσεις αυτές συμπίπτουν.
- Συνεπώς, η διάσταση του χώρου των λύσεων της (9) είναι k.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Θεμελιώδες σύστημα

- Κάθε βάση του χώρου λύσεων της (9) λέγεται *θεμελιώδες σύστημα* της (9).
- Έστω $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j=1,\ldots,k$, ένα θεμελιώδες σύστημα της (9), και $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια λύση της. Έστω $c_1,\ldots,c_k$ η μοναδική λύση του συστήματος

$$\sum_{j=1}^{k} y_j^n c_j = \gamma^n, \quad n=0,\ldots,k-1.$$

Τότε,

$$\gamma^n = \sum_{j=1}^{k} c_j y_j^n, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Ρίζες πολυωνύμου

- Θεωρητικά κομψότερος, αλλά και πολύ πιο χρήσιμος για τα επόμενα, είναι ο ακόλουθος τρόπος προσδιορισμού ενός θεμελιώδους συστήματος της (9):
- Με τους συντελεστές $\alpha_k, \dots, \alpha_0$ της (9), θεωρούμε το πολυώνυμο ρ,
$$\rho(z) := \alpha_k z^k + \cdots + \alpha_0.$$
- Οι ρίζες του ρ είναι φυσικά διάφορες του μηδενός, αφού ο σταθερός όρος α_0 δεν είναι μηδέν.
- Αναζητούμε τώρα να προσδιορίσουμε μη τετριμμένες λύσεις της (9) (μη τετριμμένη σημαίνει ότι έχει τουλάχιστον έναν μη μηδενικό όρο) της μορφής $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, όπου
$$y^n = z^n$$
(το n είναι στο y δείκτης και στο z εκθέτης).
- Τότε $z \neq 0$ και $\alpha_k z^{n+k} + \cdots + \alpha_0 z^n = 0$, δηλαδή $\rho(z) = 0$. Άρα το z είναι ρίζα του ρ.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Ρίζες πολυωνύμου II

- Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.
  1$\underline{\eta}$ *Περίπτωση*.
- Οι ρίζες $z_1, \ldots, z_k$ του ρ είναι διαφορετικές ανά δύο.
- Όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως (ορίζουσα του Vandermonde!), οι λύσεις $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$,
  $$y_j^n := z_j^n, j = 1, \ldots, k,$$
  της (9) αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημά της.

$2^{\underline{\eta}}$ *Περίπτωση*.

- Το ρ έχει πολλαπλές ρίζες.
- Έστω z ρίζα του ρ πολλαπλότητας ν.
- Τότε οι ακολουθίες $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j = 1, \dots, \nu$,

$$\begin{aligned} y_1^n &:= z^n \\ y_2^n &:= nz^n \\ &\vdots \\ y_\nu^n &:= n(n-1)\cdots(n-\nu+2)z^n \end{aligned} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{11}$$

είναι λύσεις της (9).

Απόδειξη

Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, το z είναι ρίζα πολλαπλότητας ν και του πολυωνύμου $r_n, r_n(x) := x^n \rho(x)$. Άρα $r_n(z) = r_n'(z) = \cdots = r_n^{(\nu-1)}(z) = 0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
&\alpha_k z^{n+k} + \alpha_{k-1} z^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 z^n = 0,\\
&\alpha_k (n+k) z^{n+k-1} + \alpha_{k-1}(n+k-1) z^{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 n z^{n-1} = 0,\\
&\qquad\vdots\\
&\alpha_k (n+k)(n+k-1)\cdots(n+k-\nu+2) z^{n+k-\nu+1} + \cdots\\
&\qquad\qquad\cdots + \alpha_0 n(n-1)\cdots(n-\nu+2) z^{n-\nu+1} = 0,
\end{aligned}$$

συνεπώς οι ακολουθίες που δίνονται στην (11) είναι λύσεις της (9).

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω τώρα $z_1, \dots, z_m, m < k$, οι ανά δύο διαφορετικές ρίζες του ρ και $p_1, \dots, p_m$ οι πολλαπλότητές τους. Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι ακολουθίες $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j = 1, \dots, k,$

$$\begin{aligned}
y_1^n &:= z_1^n \\
y_2^n &:= nz_1^n \\
&\vdots \\
y_{p_1}^n &:= n(n-1)\cdots(n-p_1+2)z_1^n \\
y_{p_1+1}^n &:= z_2^n \\
&\vdots \\
y_{p_1+p_2}^n &:= n(n-1)\cdots(n-p_2+2)z_2^n \\
&\vdots \\
y_k^n &:= n(n-1)\cdots(n-p_m+2)z_m^n,
\end{aligned}$$

είναι λύσεις της (9). Αποδεικνύοντας ότι κάποιος κατάλληλος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι αυτές οι λύσεις αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα της (9). Δεν θα δώσουμε εδώ την απόδειξη.

Ευστάθεια (Βασική Ευστάθεια)

Ορισμός

(Ευστάθεια Πολυβηματικών Μεθόδων.) Θα λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής, αν

- *για κάθε ΠΑΤ στο οποίο η f ικανοποιεί την ΟΣ- Lipschitz*
- *και δυο ακολουθίες προσεγγίσεων $y^0, \ldots, y^N$, $z^0, \ldots, z^N$, οι οποίες παράγονται από την ίδια πολυβηματική μέθοδο αλλά, γενικά, με διαφορετικές αρχικές τιμές , $y^0, \ldots, y^{k-1}$ και $z^0, \ldots, z^{k-1}$,*

ισχύει

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |y^j - z^j|. \tag{12}$$

Ευστάθεια II

Οι ακολουθίες $(y^n), (z^n)$ ορίζονται από τις

$$\begin{aligned}
&y^0, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\
&\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = \\
&\quad h\big[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \cdots + \beta_0 f(t^n, y^n)\big], \quad n = 0, \dots, N-k,
\end{aligned} \tag{13}$$

και

$$\begin{aligned}
&z^0, \dots, z^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\
&\alpha_k z^{n+k} + \alpha_{k-1} z^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 z^n = \\
&\quad h\big[\beta_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \cdots + \beta_0 f(t^n, z^n)\big], \quad n = 0, \dots, N-k.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ευστάθεια : συνθήκη των ριζών

Ορισμός

Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος (5) *πληροί τη συνθήκη των ριζών, αν για το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο* ρ, *που ορίζεται ως*

$$\rho(z) := \alpha_k z^k + \cdots + \alpha_0,$$

ισχύουν

$$\rho(z) = 0 \implies |z| \leqslant 1,$$
$$\rho(z) = \rho'(z) = 0 \implies |z| < 1,$$

δηλαδή όλες οι ρίζες του ρ *έχουν απόλυτη τιμή (μέτρο) όχι μεγαλύτερη της μονάδας, εκείνες δε που έχουν απόλυτη τιμή ένα είναι απλές.*

Ευστάθεια : συνθήκη των ριζών : Θεώρημα

Θεώρημα

Μια πολυβηματική μέθοδος είναι ακριβώς τότε ευσταθής, όταν πληροί τη συνθήκη των ριζών.

Ευστάθεια συνεπάγεται την συνθήκη των ριζών : Απόδειξη

Θέτουμε $f = 0$ στην (**??**) και $z^i = 0, i \in \mathbb{N}_0$, στην (14), οπότε η (**??**) λαμβάνει τη μορφή

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |y^n| \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |y^j|,$$

η οποία πρέπει να ισχύει για τις λύσεις της γραμμικής εξίσωσης διαφορών

$$\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

βλ. την (13) για $f = 0$, με σταθερά C ανεξάρτητη του N.

Ευστάθεια συνεπάγεται την συνθήκη των ριζών : Απόδειξη II

- Έστω z μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ρ. Τότε η ακολουθία $y^n := z^n$ (το n είναι στο y δείκτης και στο z εκθέτης), $n \in \mathbb{N}_0$, είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών, και επομένως πρέπει να ισχύει
$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |z|^n \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |z^j|.$$
- Αυτή η σχέση δεν μπορεί να ισχύει για $|z| > 1$, αφού τότε $|z|^N \to \infty$, $N \to \infty$. Αν λοιπόν η μέθοδος είναι ευσταθής, τότε πρέπει $|z| \leqslant 1$.
- Έστω τώρα z μια πολλαπλή ρίζα του ρ. Τότε, η ακολουθία $y^n := nz^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, είναι λύση της εξίσωσης διαφορών και επομένως πρέπει να ισχύει
$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \left(n|z|^n\right) \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |jz^j|.$$
- Αν $|z| = 1$, αυτή η σχέση δεν μπορεί να ισχύει για καμμία σταθερά C, επομένως πρέπει να έχουμε $|z| < 1$.

Συνοψίζοντας, αποδείξαμε ότι, αν η μέθοδος είναι ευσταθής, τότε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

Τάξη ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων

- Σφάλμα συνέπειας
- Σύγκλιση

Σφάλμα συνέπειας

Υποθέτουμε ότι η λύση της ΣΔΕ $y,\ y' = f(t,y)$, είναι ομαλή συνάρτηση. Για $t \in [a, b-kh]$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\big(L_h y\big)(t) := \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t+jh) - h\beta_j y'(t+jh)\big]. \tag{15}$$

Το *σφάλμα συνέπειας* ορίζεται ως,

$$E^n = \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t^{n+j}) - h\beta_j f\big(t^{n+j}, y(t^{n+j})\big)\big],$$

το οποίο γράφεται και στη μορφή

$$E^n = \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t^{n+j}) - h\beta_j y'(t^{n+j})\big] = \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t^n+jh) - h\beta_j y'(t^n+jh)\big].$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή το t^n με t οδηγούμαστε στο $\big(L_h y\big)(t)$.

Τάξη ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων

Ορισμός

(Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου.)
Έστω $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια τυχούσα, αρκετά ομαλή συνάρτηση. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, για τον οποίο υπάρχει σταθερά $\widetilde{C}$, ανεξάρτητη του h και του N, (η οποία εξαρτάται όμως από τα δεδομένα του προβλήματος και τις παραμέτρους της μεθόδου) έτσι ώστε

$$|(L_h y)(t)| \leqslant \widetilde{C} h^{p+1},$$

με $L_h y$ όπως ορίστηκε στην (15)*, τότε λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της πολυβηματικής μεθόδου* (5) *είναι p. Αν η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου είναι τουλάχιστον ένα, η μέθοδος λέγεται συνεπής.*

- Σημειώστε ότι απαιτείται να ισχύει η παραπάνω σχέση για *κάθε* ΠΑΤ με αρκετά ομαλές συναρτήσεις f και y.

Έλεγχος της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $y(t+jh)$ και $y'(t+jh)$ ως προς το σημείο t, λαμβάνουμε

$$\big(L_h y\big)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \cdots$$

με σταθερές C_j ανεξάρτητες των y, t και h, και εξαρτώμενες μόνο από τη συγκεκριμένη μέθοδο. Είναι προφανές ότι η μέθοδος (5) έχει τάξη ακρίβειας p ακριβώς τότε, αν

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0.$$

Έλεγχος της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων II

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \\ C_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \cdots + \beta_k) \end{aligned}$$

και για $j \geqslant 2$

$$\begin{aligned} C_j = \frac{1}{j!}&\big(\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + 3^j\alpha_3 + \cdots + k^j\alpha_k\big) \\ &- \frac{1}{(j-1)!}\big(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + 3^{j-1}\beta_3 + \cdots + k^{j-1}\beta_k\big). \end{aligned}$$

Έλεγχος της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων III

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συνέπεια της μεθόδου (δηλαδή $p \geqslant 1$) είναι επομένως να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} &\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0 \\ &\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \cdots + \beta_k) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ρ, που έχουμε ορίσει, και του πολυωνύμου $\sigma, \sigma(z) := \beta_k z^k + \cdots + \beta_0$, η (16) γράφεται στη μορφή

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1).$$

Έλεγχος της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων : Παραδείγματα

Υπολογίζοντας τις σταθερές C_j για τις πολυβηματικές μεθόδους που είδαμε ως παραδείγματα, εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

- η τάξη ακρίβειας των μεθόδων του Euler είναι ένα
- η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του τραπεζίου δύο
- η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Simpson (4) τέσσερα
- η τάξη ακρίβειας ης μεθόδου ανάδρομων διαφορών με k βήματα είναι ίση με k.

Βοηθητικό αποτέλεσμα ευστάθειας

Πρόταση

(*Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων. Butcher*) *Έστω ότι η k– βηματική μέθοδος* (5) *πληροί τη συνθήκη των ριζών. Έστω $\lambda^n, n = 0, \dots, N-k$, δεδομένες σταθερές, και έστω $\beta_i^n, i = 0, \dots, k,\ n = 0, \dots, N-k$, δεδομένοι αριθμοί με $|\beta_i^n| \leqslant B < \infty$. Για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών*

$$\begin{aligned} \alpha_k\psi^{n+k} + \alpha_{k-1}\psi^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0\psi^n =& h\big(\beta_k^n\psi^{n+k} + \cdots + \beta_0^n\psi^n\big) \\ &+ \lambda^n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k. \end{aligned} \tag{17}$$

Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για $h \leqslant h_0$ να ισχύει

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |\psi^n| \leqslant C\Big[N \max_{0\leqslant n\leqslant N-k} |\lambda^n| + \max_{0\leqslant j\leqslant k-1} |\psi^j|\Big], \tag{18}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα $b-a$, h_0, B, αλλά είναι ανεξάρτητη των h, λ^n, ψ^n, N και β_i^n.

Σύγκλιση

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι η ΟΣ-Lipschitz ικανοποιείται και το ΠΑΤ έχει μια αρκετά ομαλή λύση $y \in C^{p+1}[a,b]$. Έστω ότι η $k-$βηματική μέθοδος (5) είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας $p \geqslant 1$. Τότε, υπάρχει $h_0 > 0$, τέτοιο ώστε, για $0 < h \leqslant h_0$, να ισχύει

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |y(t^n) - y^n| \leqslant C\Big[\max_{0\leqslant j\leqslant k-1} |y(t^j) - y^j| + h^p \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y^{p+1}(t)|\Big] \qquad (19)$$

με μια σταθερά C ανεξάρτητη των h, N, y.

Σύγκλιση ΙΙ

Απόδειξη. Έστω

$$\rho^n := \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t^n + jh) - h\beta_j y'(t^n + jh)\big], \quad n = 0, \dots, N-k.$$

Επειδή, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p, έχουμε

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N-k} |\rho^n| \leqslant C' h^{p+1} \|y^{(p+1)}\|_\infty, \tag{20}$$

με μια σταθερά C' ανεξάρτητη των h, y, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα αναπτύσσοντας κατά Taylor. Με $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, $n = 0, \dots, N$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\alpha_k\varepsilon^{n+k} + \alpha_{k-1}\varepsilon^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0\varepsilon^n = \\
&= \big[\alpha_k y(t^{n+k}) + \cdots + \alpha_0 y(t^n)\big] - \big(\alpha_k y^{n+k} + \cdots + \alpha_0 y^n\big) \\
&= h\big[\beta_k y'(t^{n+k}) + \cdots + \beta_0 y'(t^n)\big] - h\big(\beta_k f^{n+k} + \cdots + \beta_0 f^n\big) + \rho^n \\
&= h\Big[\beta_k\big[f\big(t^{n+k}, y(t^{n+k})\big) - f^{n+k}\big] + \cdots + \beta_0\big[f\big(t^n, y(t^n)\big) - f^n\big]\Big] + \rho^n.
\end{aligned}$$

Σύγκλιση III

Θέτουμε τώρα, για $m = 0, \ldots, N$,

$$g^m := \begin{cases} \frac{f\left(t^m, y(t^m)\right) - f^m}{\varepsilon^m}, & \text{αν} \quad \varepsilon^m \neq 0, \\ 0 \qquad\qquad\quad , & \text{αν} \quad \varepsilon^m = 0, \end{cases}$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή

$$\alpha_k \varepsilon^{n+k} + \cdots + \alpha_0 \varepsilon^n = h\left(\beta_k g^{n+k} \varepsilon^{n+k} + \cdots + \beta_0 g^n \varepsilon^n\right) + \rho^n, \tag{21}$$

για $n = 0, \ldots, N-k$. Τώρα ισχύει προφανώς

$$|g^n| \leqslant L, \quad n = 0, \ldots, N,$$

όπου L η σταθερά Lipschitz της f ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

Σύγκλιση IV

Με
$$\beta_i^n := \beta_i g^{n+i}, \quad i = 0, \dots, k, \quad n = 0, \dots, N - k,$$
ισχύει συνεπώς
$$\max_{i,n} |\beta_i^n| \leqslant L \max_i |\beta_i| =: B < \infty. \tag{22}$$
Η (21) γράφεται τώρα ως
$$\alpha_k \varepsilon^{n+k} + \cdots + \alpha_0 \varepsilon^n = h\big(\beta_k^n \varepsilon^{n+k} + \cdots + \beta_0^n \varepsilon^n\big) + \rho^n, \quad n = 0, \dots, N - k,$$
Άρα, (βλ. Πρόταση παραπάνω και Πρόταση 4.1, Βιβλίου Ακρίβη-Δουγαλή)
$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |\varepsilon^n| \leqslant C\Big[N \max_{0\leqslant n\leqslant N-k} |\rho^n| + \max_{0\leqslant j\leqslant k-1} |\varepsilon^j|\Big].$$
Χρησιμοποιώντας στην τελευταία ανισότητα την (20) και το γεγονός ότι $Nh = b - a$ καταλήγουμε στην (19).