Τρεις βασικές μέθοδοι

- Euler (Άμεση Euler)

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1, \tag{1}$$

- *Έμμεση Euler*, (Έμμεση)

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1, \tag{2}$$

- *Μέθοδος του Τραπεζίου* (Έμμεση)

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right], \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{3}$$

Ευστάθεια και Συνέπεια

Η ευστάθεια είναι κεντρική έννοια στην προσέγγιση ΠΑΤ

- Ευστάθεια σε σχέση με την. συσσώρευση σφαλμάτων
- Ευστάθεια σε σχέση με την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων
  - A- Stability (A -Ευστάθεια) (γενική έννοια ευστάθειας)
  - B- Stability (B -Ευστάθεια) (προβλήματα διάχυσης)

Ευστάθεια – συσσώρευση σφαλμάτων

Λήμμα

(Βασικό Αποτέλεσμα.) *Έστω δ θετικός αριθμός και $K, d_0, d_1, \dots$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε*

$$d_{i+1} \leq (1+\delta)d_i + K, \quad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Τότε, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα d_n συναρτήσει των d_0, K, δ και n ως εξής

$$d_n \leq d_0 e^{n\delta} + K\frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{5}$$

- ....

Ευστάθεια – συσσώρευση σφαλμάτων

Απόδειξη.
Για $n = 0$ η εκτίμηση (5) ισχύει προφανώς. Για $n \geq 1$, δεδομένης της (4), και με χρήση επαγωγής, έχουμε

$$d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + K\big[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \cdots + (1+\delta)^{n-1}\big],$$

Συνεπώς

$$d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + K\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta},$$

σχέση η οποία οδηγεί στην (5), δεδομένου ότι $e^\delta \geq 1 + \delta$. $\square$

Ευστάθεια – συσσώρευση σφαλμάτων II

- Υποθέτουμε ότι για κάθε διακριτό χρονικό βήμα το αριθμητικό σχήμα μπορεί να οδηγήσει σε μια δομή της μορφής

$$d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i + K.$$

- Υποθέτουμε ότι σε κάθε διακριτό χρονικό βήμα η ποσότητα K αντιστοιχεί σε κάποιας μορφής σφάλμα.
- Τότε το συνολικό σφάλμα δεν είναι μεγαλύτερο από:

$$d_0 e^{n\delta} + K \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$$

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια

- Σημαντική ειδική περίπτωση

$$d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i.$$

- δηλαδή, $K = 0$. Τότε τα d_i φράσσονται όλα από

$$d_0 e^{n\delta}.$$

- Αυτή η εκτίμηση μπορεί να εφαρμοστεί στο δοθέν σχήμα δίδοντας ένα απλό αποτέλεσμα ευστάθειας.

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler

Έστω ότι τα $y^n, z^n, 0 \leq n \leq N$, δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(t^n, y^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ y^0 &= y_0, \end{aligned} \tag{6}$$

και

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + hf(t^n, z^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ z^0 &= z_0, \end{aligned} \tag{7}$$

με αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

- Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $|y^n - z^n|$ ως προς $|y_0 - z_0|$.

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler II

Θα δείξουμε ότι αν η f ικανοποιεί την ΟΣ-Lipschitz τότε

$$\max_{1\leq n\leq N} |y^n - z^n| \leq C|y_0 - z_0|, \tag{8}$$

με $C = e^{L(t^n-a)}$.

Απόδειξη.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις (7) και (6), λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\big[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\big].$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την ΟΣ- Lipschitz (**??**), έχουμε

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

Συνεπώς, επαγωγικά,

$$|y^n - z^n| \le (1 + hL)^n |y^0 - z^0| \le e^{hLn}|y^0 - z^0|, \quad n = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Δηλαδή,

$$|y^n - z^n| \le e^{L(t^n - a)}|y_0 - z_0|, \quad n = 0, \dots, N, \tag{10}$$

και

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{L(b-a)}|y_0 - z_0|, \tag{11}$$

Σύγκλιση – Euler– Θεώρημα

Θεώρημα

Έστω $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ *μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την ΟΣ-Lipschitz. Υποθέτουμε ότι η λύση του ΠΑΤ y, ικανοποιεί την συνθήκη ομαλότητας* $y \in C^2[a,b]$. *Αν* $y^0, \dots, y^N$ *είναι οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Euler με* $h = (b-a)/N$, *τότε ισχύει*

$$\max_{0 \le n \le N} \left| y(t^n) - y^n \right| \le \frac{M}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) h \tag{12}$$

με

$$M := \|y''\|_\infty = \max_{a \le t \le b} \left| y''(t) \right|$$

και όπου L συμβολίζει την σταθερά Lipschitz.

Σύγκλιση – Euler– Απόδειξη

Από τον ορισμό της μεθόδου και τον ορισμό του σφάλματος συνέπειας παίρνουμε την *εκτίμηση σφάλματος*

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^{n} + h\big[f\big(t^n, y(t^n)\big) - f(t^n, y^n)\big] + E^n. \tag{13}$$

Χρησιμοποιώντας την ΟΣ-Lipschitz , παίρνουμε

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^{n}| + hL|\varepsilon^{n}| + |E^n|,$$

Αφου

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1 + hL)|\varepsilon^{n}| + \max_{0\le m\le N-1} |E^m|, \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{14}$$

Από το Βασικό Λήμμα ευστάθειας, συμπεραίνουμε από την (34)

$$|\varepsilon^{n}| \le e^{nhL}|\varepsilon^{0}| + \frac{e^{nhL} - 1}{hL} \max_{0\le m\le N-1} |E^m|, \quad n = 0, \ldots, N,$$

Συνεπώς αφού, $\varepsilon^0 = 0$ και $nh \le b - a$,

$$|\varepsilon^{n}| \le \frac{e^{L(b-a)} - 1}{hL} \max_{0\le m\le N-1} |E^m|, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εκτίμηση για το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Ευστάθεια τύπου B και A

Μια φυσιολογική ερώτηση για την ευστάθεια σχετίζεται με το εάν οι προσεγγίσεις ικανοποιούν αντίστοιχες ιδιότητες ευστάθειας με την ακριβή λύση. Στην περίπτωση που η f ικανοποιεί την Μονόπλευρη Συνθήκη Lipschitz, έχουμε:

Ορισμός

*(**Ευστάθεια τύπου B.**) μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται B–ευσταθής, αν, όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα ΑΤ όπου η f ικανοποιεί την Μονόπλευρη Συνθήκη Lipschitz, για κάθε αρχικές τιμές y^0 και z^0, δίδει προσεγγίσεις y^n και z^n, αντίστοιχα, και η ακολουθία $\|y^n - z^n\|, n = 0, \ldots, N$, είναι πάντα φθίνουσα, δηλαδή,*

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{15}$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^m$. □

Προχωρημένες έννοιες Ευστάθειας Stability – Ευστάθεια τύπου Β και Α II

- Οπως θα δούμε η μέθοδος του Euler δεν είναι *Β–ευσταθής*.
- *Ευστάθεια τύπου Α.*
- Α–ευστάθεια είναι μια άλλη έννοια ευστάθειας η οποία αναφέρεται σε προσεγγίσεις *γραμμικών* ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

Ορισμός

*(**Ευστάθεια τύπου Α.**) Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Α–ευσταθής, αν, όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα της μορφής*

$$y'(t) = \lambda y(t)$$

όπου ο συντελεστής $\lambda \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί $Re\lambda \leq 0$, δίδει προσεγγίσεις y^n, και η ακολουθία $\|y^n\|, n = 0, \dots, N$, είναι πάντα φθίνουσα, δηλαδή,

$$|y^{n+1}| \leq |y^n|, \quad n = 0, \dots . \qquad \square \qquad (16)$$

$$\text{B–Ευστάθεια} \implies \text{A–Ευστάθεια.}$$

- Παρατηρούμε ότι επειδή η f είναι γραμμική (αφινική), $f(y-z) = f(y) - f(z)$, λόγω της γραμμικότητας της f .
- Αν $f(y) = \lambda y$, με $\lambda \leq 0$ τότε η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz:

$$(f(y_2) - f(y_1))(y_2 - y_1) = (\lambda(y_2) - \lambda(y_1))(y_2 - y_1) = \lambda(y_2 - y_1)^2 \leq 0\,.$$

- Συνεπώς επειδή έχουμε υποθέσει ότι η μέθοδος είναι A–Ευσταθής η ακολουθία $\|y^n - z^n\|, n = 0, \ldots, N$, είναι φθίνουσα. Διαλέγοντας $z^n = 0, n = 0, \ldots, N$, έχουμε ότι η ακολουθία $\|y^n\|, n = 0, \ldots, N$, είναι φθίνουσα. (Εδώ πρέπει να αποδειχθεί ότι η $z^n = 0, n = 0, \ldots, N$, μπορεί να προκύψει ως λύση του σχήματος.

Ευστάθεια – Η μέθοδος Euler δεν είναι A-Ευσταθής

Η άμεση μέθοδος Euler για το πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$ είναι, $y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n$, δηλαδή.,

$$y^{n+1} = r(h\lambda)y^n, \quad \text{with} \quad r(z) := 1 + z, \tag{17}$$

συνεπώς

$$|y^{n+1}| = |1 + h\lambda|\,|y^n|. \tag{18}$$

Παρατηρούμε οτι ο μιγαδικός αριθμός $h\lambda$ ανήκει στο μη-θετικό ημιεπίπεδο (δεδομένου ότι $Re\ \lambda \leq 0$). Αν βρίσκεται έξω από τον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο το σημείο -1, τότε $|1 + h\lambda| > 1$, οπότε αν το $y^n \neq 0$,

$$|y^{n+1}| > |y^n|.$$

Ευστάθεια – για ποια $h\lambda$ μέθοδος Euler είναι ευσταθής;

Η άμεση μέθοδος Euler για το πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$ ικανοποιεί

$$|y^{n+1}| = |1 + h\lambda|\,|y^n|. \tag{19}$$

- όταν $h\lambda$ βρίσκεται στον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο -1 τότε $|1 + h\lambda| \leq 1$ άρα,
$$|y^{n+1}| \leq |y^n|.$$

Ορισμός

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$y'(t) = \lambda y(t),$$

όπου το λ είναι σταθερός μιγαδικός συντελεστής. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση διακριτοποιείται από μια μονοβηματική μέθοδο με σταθερό βήμα h. Το Πεδίο Ευστάθειας S της μεθόδου, αποτελείται από όλα τα $h\lambda = z \in \mathbb{C}$ για τα οποία οι προσεγγίσεις y^n ικανοποιούν $|y^n|, n = 0, \dots,$ είναι φθίνουσα ακολουθία:

$$|y^{n+1}| \leq |y^n|, \quad n = 0, \dots . \tag{20}$$

Η τομή του S με τον άξονα των πραγματικών αριθμών λέγεται Διάστημα Ευστάθειας της μεθόδου.

Ευστάθεια A και πεδία ευστάθειας

- Μια μέθοδος είναι A–ευσταθής, αν και μόνο αν το ημιεπίπεδο $\mathbb{C}^-$,

$$\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : Re\, z \le 0\},$$

  περιέχεται στο πεδίο ευστάθειας S της μεθόδου

- Το πεδίο ευστάθειας S της άμεσης Euler ειναι ο μοναδιαίος δίσκος με κέντρο το σημείο -1,

$$S := \{z \in \mathbb{C} : |1 + z| \le 1\}; \tag{21}$$

Ευστάθεια – Η μέθοδος του τραπεζίου είναι A–ευσταθής αλλά όχι B–ευσταθής.

Η μέθοδος του τραπεζίου $y^n \mapsto y^{n+1}$ είναι

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\big[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\big], \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{22}$$

- *Ισχυρισμός I*: Η μέθοδος του τραπεζίου είναι A–ευσταθής.
- *Ισχυρισμός II*: Η μέθοδος του τραπεζίου δεν είναι B–ευσταθής.

Ευστάθεια – Η μέθοδος του τραπεζίου είναι Α–ευσταθής.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο στο πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$, έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(\lambda y^n + \lambda y^{n+1}),$$

άρα

$$y^{n+1} = r(h\lambda)y^n, \quad \text{with} \quad r(z) := \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}. \tag{23}$$

Προκύπτει ότι το πεδίο ευστάθειας S της μεθόδου του τραπεζίου είανι

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |z-2|\} = \mathbb{C}^-.$$

Συνεπώς, η μέθοδος του τραπεζίου είναι Α–ευσταθής.

Ευστάθεια – Η μέθοδος του τραπεζίου δεν είναι Β–ευσταθής.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο στο πρόβλημα

$$y'(t) = \lambda(t)y(t),$$

όπου η συνάρτηση $\lambda = \lambda(t)$, είναι συνεχής έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda(t^n)y^n + \lambda(t^{n+1})y^{n+1}\right].$$

Σημειώστε ότι εφαρμόζουμε την μέθοδο σε ένα γραμμικό ΠΑΤ, αλλά τώρα επιτρέπουμε στο λ να μεταβάλλεται με τον χρόνο t. Υποθέτουμε ότι πάντα $\lambda(t) \leq 0$, οπότε η μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz ικανοποιείται. Έστω h σταθερό και υποθέτουμε για παράδειγμα ότι το λ έχει επιλεγεί έτσι ώστε $h\lambda(t^n) = -8$ και $h\lambda(t^{n+1}) = -1$. Τότε,

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}\left(-8y^n - y^{n+1}\right),$$

Συνεπώς $y^{n+1} = -2y^n$, άρα $|y^{n+1}| = 2|y^n|$, δηλαδή η ακολουθία $|y^n| = |y^n - z^n|$ για $z^n = 0, \ = 0, \ldots$ δεν είναι φθίνουσα.

Ευστάθεια – Η μέθοδος του μέσου είναι Α–ευσταθής αλλά ΚΑΙ Β–ευσταθής.

- Η μέθοδος του μέσου είναι

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1/2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}).$$

- Αν εφαρμοστεί στο πρόβλημα $y'(t) = \lambda(t)y(t)$, παίρνουμε,

$$y^{n+1} = y^n + \lambda(t^{n+1/2})\frac{h}{2}[y^n + y^{n+1}].$$

  και το αντιπαράδειγμα για την μέθοδο του τραπεζίου δεν μπορεί να δουλέψει τώρα.

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέθοδος του μέσου είναι Β–ευσταθής!!

Ευστάθεια – Έμμεση Euler

Η Έμμεση Euler είναι Α–ευσταθής ΚΑΙ Β–ευσταθής. Έστω ότι τα $y^n, z^n, 0 \leq n \leq N$, δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ y^0 &= y_0, \end{aligned} \tag{24}$$

και

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + hf(t^{n+1}, z^{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ z^0 &= z_0, \end{aligned} \tag{25}$$

με αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

- Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $|y^n - z^n|$ ως προς $|y_0 - z_0|$.

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Έμμεση Euler

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την ΟΣ- Lipschitz. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (24) και (25), λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\big[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\big]. \tag{26}$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την ΟΣ- Lipschitz, έχουμε

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + hL|y^{n+1} - z^{n+1}|, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

. Υποθέτουμε ότι το h είναι κατάλληλα μικρό, έτσι ώστε $Lh \leq 1/2$,

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \frac{1}{1 - Lh}|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Έμμεση Euler II

Τώρα για $Lh \le 1/2$, ισχύει

$$\frac{1}{1-Lh} \le 1 + 2Lh,$$

Συνεπώς

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1+2Lh)|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

άρα επαγωγικά,

$$|y^n - z^n| \le (1+2hL)^n |y^0 - z^0| \le e^{2hLn}|y^0 - z^0|, \quad n = 1, \dots, N. \tag{27}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην

$$|y^n - z^n| \le e^{2L(t^n - a)}|y_0 - z_0|, \quad n = 0, \dots, N, \tag{28}$$

και

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{2L(b-a)}|y_0 - z_0|, \tag{29}$$

δηλαδή η Έμμεση Euler είναι ευσταθής.

Ευστάθεια – Η Έμμεση Euler είναι B–ευσταθής

Θα δείξουμε ότι η μέθοδος είναι B–ευσταθής. Θεωρούμε ένα ΠΑΤ όπου η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

Ξεκινώντας πάλι από την (26). και παίρνοντας το γινόμενο με $y^{n+1} - z^{n+1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 =& (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) + (f(y^{n+1}) - f(z^{n+1}), y^{n+1} - z^{n+1}) \\ \leq& (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}), \end{aligned}$$

Συνεπώς από την ανισότητα Cauchy–Schwarz,

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq \|y^n - z^n\| \, \|y^{n+1} - z^{n+1}\|,$$

δηλαδή, $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|, n = 0, \ldots, N$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Ευστάθεια – Η Έμμεση Euler είναι A–ευσταθής

Αφού η B–ευστάθεια συνεπάγεται την A–ευστάθεια η Έμμεση Euler θα είναι και A–ευσταθής.

Θα δείξουμε κατευθείαν ότι η μέθοδος είναι A–ευσταθής. Εφαρμόζοντας την μέθοδο στο πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$, έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1},$$

$$y^{n+1} = r(h\lambda)y^n, \quad \text{with} \quad r(z) := \frac{1}{1-z}. \tag{30}$$

Προκύπτει ότι το πεδίο ευστάθειας S της μεθόδου είναι

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq 1\},$$

το οποίο είναι το εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου με κέντρο το 1. Συνεπώς, η Έμμεση Euler είναι A–ευσταθής.

Σύγκλιση

Θα εκτιμήσουμε το σφάλμα

$$\varepsilon^n := y(t^n) - y^n, \quad n = 0, \dots, N. \tag{31}$$

Έτσι θα αποδείξουμε την συγκλιση των μεθόδων. Σε όλες τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε το σφάλμα συνέπειας και τεχνικές αντίστοιχες με τις αποδείξεις ευστάθειας της μεθόδου.
Θα επαναλάβουμε πρώτα το αποτέλεσμα για την άμεση μέθοδο Euler και κατόπιν θα αποδείξουμε την σύγκλιση για την Έμμεση Euler.

Σύγκλιση – Euler– Θεώρημα

Θεώρημα

Έστω $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ *μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την ΟΣ-Lipschitz. Υποθέτουμε ότι η λύση του ΠΑΤ y, ικανοποιεί την συνθήκη ομαλότητας* $y \in C^2[a,b]$. *Αν* $y^0, \dots, y^N$ *είναι οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Euler με* $h = (b-a)/N$, *τότε ισχύει*

$$\max_{0 \le n \le N} \left| y(t^n) - y^n \right| \le \frac{M}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) h \tag{32}$$

με

$$M := \|y''\|_\infty = \max_{a \le t \le b} \left| y''(t) \right|$$

και όπου L συμβολίζει την σταθερά Lipschitz.

Σύγκλιση – Euler– Απόδειξη

Από τον ορισμό της μεθόδου και τον ορισμό του σφάλματος συνέπειας παίρνουμε την *εκτίμηση σφάλματος*

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\big[f\big(t^n, y(t^n)\big) - f(t^n, y^n)\big] + E^n. \tag{33}$$

Χρησιμοποιώντας την ΟΣ-Lipschitz , παίρνουμε

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + hL|\varepsilon^n| + |E^n|,$$

Αφου

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + hL)|\varepsilon^n| + \max_{0 \leq m \leq N-1} |E^m|, \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{34}$$

Από το Βασικό Λήμμα ευστάθειας, συμπεραίνουμε από την (34)

$$|\varepsilon^n| \leq e^{nhL}|\varepsilon^0| + \frac{e^{nhL} - 1}{hL} \max_{0 \leq m \leq N-1} |E^m|, \quad n = 0, \ldots, N,$$

Συνεπώς αφού, $\varepsilon^0 = 0$ και $nh \leq b - a$,

$$|\varepsilon^n| \leq \frac{e^{L(b-a)} - 1}{hL} \max_{0 \leq m \leq N-1} |E^m|, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εκτίμηση για το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Σύγκλιση – Έμμεση Euler

Θεωρούμε την *Έμμεση Euler*

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1, \tag{35}$$

Θα εκτιμήσουμε το σφάλμα

$$\varepsilon^n := y(t^n) - y^n, \quad n = 0, \dots, N, \tag{36}$$

των προσεγγίσεων της Έμμεσης Euler.
Η απόδειξη στην περίπτωση όπου η f ικανοποιεί την ΟΣ-Lipschitz είναι παρόμοια με αυτήν της άμεσης Euler, με την διαφορά ότι στο ενδιάμεσο μέρος θα πρεπει να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της απόδειξης ευστάθειας της Έμμεσης Euler. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την σύγκλιση στην περίπτωση όπου η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

Σύγκλιση Έμμεσης Euler: η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

Όπως πριν έχουμε την εξίσωση σφάλματος

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\Big[f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\Big] + E^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας με ε^{n+1} και χρησιμοποιώντας την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, λαμβάνουμε,

$$(\varepsilon^{n+1})^2 \leq \varepsilon^n \varepsilon^{n+1} + E^n \varepsilon^{n+1} \quad \text{ή} \quad |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + \max_{0 \leq m \leq N} |E^m|,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$|\varepsilon^n| \leq n \max_{0 \leq m \leq N} |E^m|.$$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση συνέπειας της μεθόδου, 'έχουμε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon^n| \leq \frac{b-a}{2} \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)| h. \tag{37}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η σταθερά του σφάλματος είναι πολύ καλύτερη από την αντίστοιχη που προκύπτει αν η f ικανοποιεί την ΟΣ-συνθήκη Lipschitz. Σ' αυτήν την περίπτωση θα είχαμε

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left|\varepsilon^n\right| \leq \frac{M}{L}\big(\mathrm{e}^{L(b-a)} - 1\big) h, \quad M := \|y''\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} \left|y''(t)\right|. \tag{38}$$