Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι: Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big), \quad a \leq t \leq b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη α$y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (1).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε

  y^i την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^i \approx y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Η Άμεση μέθοδος του Euler

Χρησιμοποιούμε μια ομοιόμορφη διάμεριση, δηλαδή,

- $N \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $h := (b-a)/N$ να είναι το βήμα διακριτοποίησης στο χρόνο (time step) και $t^i := a + ih, i = 0, \dots, N$.
- Τότε $t^{n+1} - t^n = h$.

Η Άμεση μέθοδος του Euler δίδει προσεγγίσεις $y^1, \dots, y^N$, οι οποίες ικανοποιούν

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1, \tag{2}$$

όπου $y^0 := y_0$ όπως στην (1). Η μέθοδος καλείται άμεση δεδομένου ότι το y^{n+1} μπορεί να υπολογισθεί κατευθείαν (άμεσα) ως προς το y^n, ή διαφορετικά, ο υπολογισμός του y^{n+1} δεν απαιτεί την επίλυση κάποιας εξίσωσης όπως άλλες μέθοδοι που θα δούμε στην συνέχεια.

- μέθοδος *ενός βήματος*
- δεδομένου του y^n η μέθοδος περιγράφει μια διαδικασία για τον υπολογισμό του y^{n+1}
- διακριτή χρονική εξέλιξη

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας διακριτές παραγώγους

Θεωρούμε την ΔΕ στο σημείο t^n,

$$y'(t^n) = f\big(t^n, y(t^n)\big),$$

προσεγγίζουμε το $y'(t^n)$ από το πηλίκο διαφορών

$$\frac{1}{h}\big[y(t^{n+1}) - y(t^n)\big],$$

οπότε

$$\frac{1}{h}\big[y(t^{n+1}) - y(t^n)\big] \approx f\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n),$$

δηλαδή την σχέση (2).

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων

Ολοκληρώνοντας την ΔΕ από το t^n έως το t^{n+1}, παίρνουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

δηλ.,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt. \qquad (3)$$

Τώρα προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος:

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx hf\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n),$$

δηλαδή την (2).

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor

Από τον τύπο του Taylor (αναπτύσσοντας την y ως προς το σημείο t^n, έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2).$$

Χρησιμοποιώντας την ΔΕ έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + O(h^2),$$

Αρα, αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης,

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n),$$

δηλαδή την (2).

Συνέπεια

Το *σφάλμα συνέπειας* της μεθόδου είναι ένα βασικό εργαλείο για τον έλεγχο της ποιότητας των προσεγγίσεων της μεθόδου.

Ορισμός: Το *σφάλμα συνέπειας* E^n ορίζεται ως

$$E^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf\big(t^n, y(t^n)\big), \tag{4}$$

$n = 0, \dots, N-1$.

- Το E^n προκύπτει αντικαθιστώντας τις προσεγγίσεις στην σχέση (2) από τις αντίστοιχες τιμές της ακριβούς λύσεως.
- Το E^n πρέπει να είναι μικρό αφού

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + E^n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

- Συγκρίνετε με τον ορισμό του αλγορίθμου :

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Ανάλυση Συνέπειας

- Πόσο γρήγορα φθίνει το E^n καθώς το $h \to 0$?
- Θα δείξουμε το φράγμα για το E^n

  $$\max_n |E^n| \leq M(y, f)\, h^p$$

  όπου το $M(y, f)$ είναι ανεξάρτητο του h αλλά εξαρτάται από το y.
- Αυτή η εκτίμηση είναι βασικό εργαλείο για να αποδείξουμε σύγκλιση

  $$\max_n |y(t^n) - y^n| \to 0 \quad \text{as } h \to 0\,.$$

Θα μελετήσουμε τώρα την συμπεριφορά του σφάλματος συνέπειας καθώς $h \to 0$. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ έχουμε

$$E^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^n). \tag{5}$$

Ανάλυση Συνέπειας II

- Πόσο γρήγορα φθίνει το E^n καθώς το $h \to 0$?
- Θα δείξουμε το φράγμα για το E^n

$$\max_n |E^n| \leq M(y, f)\, h^p$$

όπου το $M(y, f)$ είναι ανεξάρτητο του h αλλά εξαρτάται από το y.

- Αυτή η εκτίμηση είναι βασικό εργαλείο για να αποδείξουμε σύγκλιση

$$\max_n |y(t^n) - y^n| \to 0 \quad \text{as } h \to 0\,.$$

Ο τύπος του Taylor (ανάπτυξη ως προς το t^n) συνεπάγεται,

$$E^n = \left[y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)\right] - y(t^n) - hy'(t^n),$$

δηλαδή,

$$E^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \tag{6}$$

όπου ξ^n σημείο ανάμεσα στα (t^n, t^{n+1}).

Ανάλυση Συνέπειας III

Αν η y είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (και η y'' δεν είναι ταυτοτικά μηδέν),

$$\max_{0\leq n\leq N-1} |E^n| \leq \frac{1}{2}\|y''\|_\infty h^2, \tag{7}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ τη νόρμα μεγίστου στο $[0, T]$, $\|\varphi\|_\infty := \max_{0\leq t\leq T}|\varphi(t)|$.
Σημειώστε ότι όταν η λύση y είν αι πολυώνυμο βαθμού ένα, το σφάλμα συνέπειας μηδενίζεται και το σφάλμα είναι μηδενικό. Η μέθοδος σ' αυτην την περίπτωση υπολογίζει ακριβώς την λύση στα t_n. ($y^n = y(t^n), n = 0, \ldots, N$.)
Το σφάλμα συνέπειας είναι της μορφής (20) με 2 να είναι ο μέγιστος εκθέτης του h. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμα ότι το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου είναι *order* of the method is *ένα*, (ο μέγιστος εκθέτης του h μειωμένος κατά ένα.)

Αλλες απλές μέθοδοι ενός βήματος

- Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες ευστάθειας και σύγκλισης της μεθόδου του Euler. όμως πρίν θα μελετήσουμε δυο άλλες σημαντικές μεθόδους:
- Backward Euler (Έμμεση Euler)
- Μέθοδος του Τραπεζίου

Έμμεση Euler

Θεωρούμε την μέθοδο *Έμμεση Euler*.
Η μέθοδος δίδει προσεγγίσεις y^m των $y(t^m)$ οι οποίες ικανοποιούν

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1, \tag{8}$$

με αρχική τιμή $y^0 := y_0$.

Στην (8) η άγνωστη y^{n+1} ορίζεται έμμεσα ως λύση μιας (γενικά) μη γραμμικής εξίσωσης, και γι' αυτό η μέθοδος λέγεται Έμμεση. Η μέθοδος μειονεκτεί , σε σχέση με την άμεση Euler, ως προς το υπολογιστικό κόστος. Όμως, η Έμμεση Euler έχει καλύτερες ιδιότητες ευστάθειας για μια κατηγορία σημαντικών προβλημάτων.

Έμμεση Euler : Σχεδιασμός

Θεωρούμε , το ΠΑΤ στο σημείο t^{n+1},

$$y'(t^{n+1}) = f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big),$$

και προσεγγίζουμε το $y'(t^{n+1})$ από το πηλίκο διαφορών

$$\frac{1}{h}\big[y(t^{n+1}) - y(t^n)\big],$$

καταλλήγουμε

$$\frac{1}{h}\big[y(t^{n+1}) - y(t^n)\big] \approx f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big).$$

Αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από y^m και το $\approx$ από $=$, οδηγούμαστε στην σχέση

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}),$$

δηλαδή, (8).

Έμμεση Euler : μπορεί να υπολογισθεί το y^{n+1} ;

Δεδομένου ότι η μέθοδος είναι έμμεση, η ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1} ως λύση της (8) δεν είναι προφανής.
Παράδειγμα. Χωρίς έξτρα υποθέσεις για την f και το h, υπάρχουν παραδείγματα όπου η ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1} δεν ισχύει.
Έστω $f(t, y) = \lambda y$, όπου ο λ, πραγματικός αριθμός. Η (8) γίνεται $y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}$, άρα

$$(1 - \lambda h) y^{n+1} = y^n. \tag{9}$$

Έστω $\lambda > 0$ και ότι $h = 1/\lambda$. Τότε, άν $y^n \neq 0$ η εξίσωση (9) δεν έχει λύση, ενώ στην περίπτωση που $y^n = 0$ οποιοδήποτε $y^{n+1} \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (9).

Έμμεση Euler : ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1}

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την Ολική Συνθήκη Lipschitz .

Θεωρούμε την συνάρτηση g,

$$g(x) := y^n + hf(t^{n+1}, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, το y^{n+1} είναι λύση της (8),άν και μόνο άν είναι σταθερό σημείο της g :

$$y^{n+1} = g(y^{n+1})\,.$$

Θα μελετήσουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.
Από την συνθήκη Lipschitz, έχουμε[1]

$$\big|g(x_1) - g(x_2)\big| \leq hL|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

Τότε για h κατάλληλα μικρό έτσι ώστε $hL < 1$, η συνάρτηση g είναι συστολή στο $\mathbb{R}$, και συνεπώς έχει μοναδικό σταθερό σημείο, την λύση y^{n+1} της (8).

---

[1] Διαβάστε: Θεωρημα Σταθερού Σημείου του Banach / Αριθμητική Ανάλυση -Ακρίβης-Δουγαλής

Έμμεση Euler : ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1} : II

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την Μονόπλευρη Συνθήκη Lipschitz:

$$\big(f(t,y_1)-f(t,y_2)\big)(y_1-y_2)\leq 0,\quad t\in[a,b],\ \ y_1,y_2\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\tilde{g}$,

$$\tilde{g}(x):=x-y^n-hf(t^{n+1},x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Η y^{n+1} είναι λύση της (8), αν και μόνο αν είναι ρίζα της $\tilde{g}$. Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

- $f(t^{n+1},\cdot)$ είναι φθίνουσα και άρα η $\tilde{g}$ αύξουσα. (Άρα έχει το πολύ μια ρίζα).
- $f(t^{n+1},\cdot)$ είναι φθίνουσα. Για $x\leq 0$, θα ισχύει $\tilde{g}(x)\leq x-y^n-hf(t^{n+1},0)$, συνεπώς $\tilde{g}(x)\to-\infty$ καθώς $x\to-\infty$.
- Για $x\geq 0$, θα ισχύει $\tilde{g}(x)\geq x-y^n-hf(t^{n+1},0)$, συνεπώς $\tilde{g}(x)\to\infty$ καθώς $x\to\infty$.

Επειδή η $\tilde{g}$είναι συνεχής, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι η g εχει τουλάχιστον μια ρίζα και άρα, η y^{n+1} υπάρχει ώς λύση της (8). Σημειώστε ότι δεν έχουμε κανένα περιορισμό για την παράμετρο διακριτοποίησης h.

Έμμεση Euler: Ανάλυση Συνέπειας I

Το Σφάλμα Συνέπειας*Σφάλμα Συνέπειας* E^n της Έμμεσης Euler δίδεται από

$$E^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big), \tag{11}$$

$n = 0, \dots, N-1$.

Χρησιμοποιώντας στην (11) το ΠΑΤ (1), μπορούμε να εκφράσουμε το E^n συναρτήσει μόνο του y,

$$E^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^{n+1}). \tag{12}$$

Έμμεση Euler: Ανάλυση Συνέπειας II

Το Σφάλμα Συνέπειας ικανοποιεί (βλ. την απόδειξη για την μέθοδο Euler)

$$E^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \tag{13}$$

όπου ξ^n σημείο ανάμεσα στα (t^n, t^{n+1}).
Αν η y είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (και η y'' δεν είναι ταυτοτικά μηδέν),

$$\max_{0 \le n \le N-1} |E^n| \le \frac{1}{2} \|y''\|_\infty h^2, \tag{14}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ τη νόρμα μεγίστου στο $[0, T]$, $\|\varphi\|_\infty := \max_{0 \le t \le T} |\varphi(t)|$.

Η μέθοδος του Τραπεζίου

Ακολουθώντας τον συνήθη συμβολισμό η απεικόνιση $y^n \mapsto y^{n+1}$ η οποία ορίζει την *μέθοδο του Τραπεζίου* για το ΠΑΤ (1) είναι

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\big[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\big], \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{15}$$

Αυτή ειναι μια σημαντική έμμεση μέθοδος *δεύτερης τάξης* την οποία θα μελετήσουμε λεπτομερώς.

Η μέθοδος του Τραπεζίου : σχεδιασμός

Ξεκινάμε ολοκληρώνοντας την ΔΕ από t^n έως t^{n+1},

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\, dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\, dt,$$

δηλαδή,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\, dt. \tag{16}$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με την μέθοδο του Τραπεζίου, οπότε,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \frac{h}{2}\Big[f\big(t^n, y(t^n)\big) + f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big)\Big].$$

Αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από y^m και το $\approx$ από $=$, οδηγούμαστε στην σχέση

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\big[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\big]$$

η οποία ορίζει την μέθοδο του Τραπεζίου.

Μέθοδος του Τραπεζίου : Ανάλυση Συνέπειας Ι

Το Σφάλμα Συνέπειας*Σφάλμα Συνέπειας* E^n της μεθόδου του Τραπεζίου δίδεται από

$$E^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - \frac{h}{2}\big[f(t^n, y(t^n)) + f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big)\big], \qquad (17)$$

$n = 0, \ldots, N-1.$

Όπως και στην περίπτωση των μεθόδων Euler:

- E^n προκύπτει αντικαθιστώντας τις προσεγγίσεις στην (15) από τις αντίστοιχες τιμές της ακριβούς λύσης.
- το E^n πρέπει να είναι μικρό αφού

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + \frac{h}{2}\big[f\big(t^n, y(t^n)\big) + f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big)\big] + E^n, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

- Συγκρίνετε με τον ορισμό της μεθόδου

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\big[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\big], \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος του Τραπεζίου : Ανάλυση Συνέπειας II
... Ο ρόλος της συμμετρίας στην απλοποίηση όρων

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι η $y(t)$ είναι λύση του ΠΑΤ στον ορισμό του E^n:

$$E^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - \frac{h}{2}\big[y'(t^n) + y'(t^{n+1})\big], \tag{18}$$

Πριν εφαρμόσουμε τον τυπο του Taylor, θα διερευνήσουμε την δομή του E^n. Παρατηρούμε ότι ο όρος $\frac{h}{2}\big[y'(t^n) + y'(t^{n+1})\big]$ είναι συμμετρικός ως προς το μέσο

$$t^{n+1/2} = \frac{h}{2}\big[t^n + t^{n+1}\big].$$

Οπότε οδηγούμαστε στο να αναπτύξουμε όλους τους όρους του E^n ως προς $t^{n+1/2}$.

Μέθοδος του Τραπεζίου : Ανάλυση Συνέπειας III
... *Ο ρόλος της συμμετρίας στην απλοποίηση όρων*

Το *Σφάλμα Συνέπειας* E^n της μεθόδου του Τραπεζίου είναι

$$E^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - \frac{h}{2}\left[y'(t^n) + y'(t^{n+1})\right], \tag{19}$$

- $y(t^{n+1}) = y(t^{n+1/2}) + \frac{h}{2}y'(t^{n+1/2}) + \frac{h^2}{4\cdot 2}y''(t^{n+1/2}) + \frac{h^3}{8\cdot 3!}y'''(\xi_1^n)$
- $y(t^n) = y(t^{n+1/2}) - \frac{h}{2}y'(t^{n+1/2}) + \frac{h^2}{4\cdot 2}y''(t^{n+1/2}) - \frac{h^3}{8\cdot 3!}y'''(\xi_2^n)$
- $y'(t^{n+1}) = y'(t^{n+1/2}) + \frac{h}{2}y''(t^{n+1/2}) + \frac{h^2}{4\cdot 2}y'''(\xi_3^n)$
- $y'(t^n) = y'(t^{n+1/2}) - \frac{h}{2}y''(t^{n+1/2}) + \frac{h^2}{4\cdot 2}y'''(\xi_4^n)$

όπου τα ξ_i^n είναι σημεία ανάμεσα στα t^n, t^{N+1}.

Μέθοδος του Τραπεζίου : Ανάλυση Συνέπειας IV

Τελικά οδηγούμαστε στο εξής αποτέλεσμα.
Αν η ακριβής λύση y είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (και η y''' δεν είναι ταυτοτικά μηδέν),

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |E^n| \leq \frac{1}{6} \|y'''\|_\infty h^3, \tag{20}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ η νόρμα μεγίστου στο $[0, T]$, $\|\varphi\|_\infty := \max_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t)|$.

Συγκρίνετε με τα σφάλματα συνέπειας των μεθόδων Euler.