Ευστάθεια

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε δύο περιπτώσεις

- η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz
- η f ικανοποιεί την *μονομερή* συνθήκη Lipschitz (one sided Lipschitz condition).

Για $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τα ΠΑΤ

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \quad a \le t \le b, \\ y(a) &= y_0, \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} z' &= f(t,z), \quad a \le t \le b, \\ z(a) &= z_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- Ερώτηση: Υποθέτουμε ότι $y_0 \approx z_0$. Ισχύει ότι

$$y(t) \approx z(t), \quad \text{για κάθε } t\,?$$

Ευστάθεια: η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz

- Εστω ότι η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz

$$\left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right| \le L|y_1-y_2| \quad \forall t \in [a,b] \;\; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

- τότε τα ΠΑΤ (1) εχουν μοναδικές λύσεις $y, z \in C^1[a,b]$,

Επιπλέον έστω,

- $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ το σφάλμα (ή η απόσταση) των y και z
- Ερώτηση: Τι γνωρίζουμε για το $\varepsilon(t)$?. Χρησιμοποιώντας τους ορισμους

$$\varepsilon'(t) = f(t,y) - f(t,z), \qquad \text{for } t \in [a,b].$$

Θα δείξουμε ότι

- a)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varepsilon^2(t) \le L\varepsilon^2(t),$$

και

- b)

$$\left|\varepsilon(t)\right| \le e^{L(t-a)}\left|\varepsilon(a)\right|, \quad a \le t \le b.$$

Ευστάθεια: η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz – Απόδειξη της a)

- Για $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ ξεκινούμε από την
- $\varepsilon'(t) = f(t, y) - f(t, z), \quad$ για $t \in [a, b]$.
- Πολλαπλασιάζουμε τώρα με $\varepsilon(t)$ οπότε

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \big(f(t, y) - f(t, z)\big)\varepsilon(t),$$

Τώρα

- Αριστερό Μέλος:

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varepsilon^2(t),$$

- Δεξιό Μέλος:

$$\big(f(t, y) - f(t, z)\big)\varepsilon(t) \leq \big|f(t, y) - f(t, z)\big|\,\big|\varepsilon(t)\big| \leq L\varepsilon^2(t)$$

Αρα

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varepsilon^2(t) \leq \big|f(t, y) - f(t, z)\big|\,\big|\varepsilon(t)\big| \leq L\varepsilon^2(t),$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Ευστάθεια: η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz – Απόδειξη της b)

- Ξεκινάμε από την
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varepsilon^2(t) \le L\varepsilon^2(t),$$
- Θέτοντας $\varepsilon^2(t) =: \varphi(t)$ έχουμε
$$\varphi' - 2L\varphi \le 0, \quad t \in [a, b]. \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2Lt},
$$e^{-2Lt}\varphi'(t) - 2Le^{-2Lt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}\Big(e^{-2Lt}\varphi(t)\Big) \le 0, \quad t \in [a, b].$$
Συνεπώς ο $e^{-2Lt}\varphi(t)$ φθίνει στο $[a, b]$. Άρα,
$$e^{-2Lt}\varphi(t) \le e^{-2La}\varphi(a), \quad a \le t \le b,$$
δηλαδή,
$$\big|\varepsilon(t)\big| \le e^{L(t-a)}\big|\varepsilon(a)\big|, \quad a \le t \le b, \tag{4}$$
και
$$\max_{a\le t\le b}\big|y(t) - z(t)\big| \le e^{L(b-a)}|y_0 - z_0|. \tag{5}$$

Ευστάθεια: f Lipschitz: Παρατηρήσεις

- Η σταθερά $e^{L(b-a)}$ στο δεξιό μέλος στο παραπάνω φράγμα αυξάνει εκθετικά σε σχέση με την σταθερά Lipschitz L : Γεγονός που καλύπτει το χειρότερο δυνατό σενάριο για την συπεριφορά του σφάλματος.
- Όταν το L είναι πολύ μεγάλο η παραπάνω εκτίμηση σφάλματος δεν δίδει αρκετά χρήσιμη πληροφορία για το εάν το $y(t) \approx z(t)$ αν το διάστημα $b - a$ δεν είναι πολύ μικρό .

Ευστάθεια: *f* dissipative

Υποθέτουμε τώρα ότι η *f* ικανοποιεί την σχέση

$$\big(f(t,y_1)-f(t,y_2)\big)(y_1-y_2)\le 0,\quad t\in[a,b],\ \ y_1,y_2\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Η οποία καλείται μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz (*one-sided Lipschitz condition*). Σημειώστε ότι αν $f'_y(t,y)\le 0$ τότε η (6) ισχύει.

- Η συνθήκη αυτή εμφανίζεται σε σημαντικές εφαρμογές. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι παραβολικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Ευστάθεια: *f* dissipative : εκτίμηση σφάλματος

Πολλαπλασιάζουμε την $\varepsilon'(t) = f(t, y) - f(t, z)$ με $\varepsilon(t)$,

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \big(f(t, y) - f(t, z)\big)\varepsilon(t),$$

συνεπώς, η (6) συνεπάγεται,

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varepsilon^2(t) \leq 0,$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Άρα, η ε^2 είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Συνεπώς η $|\varepsilon|$ είναι επίσης φθίνουσα συνάρτηση και συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{a \leq t \leq b} \big|y(t) - z(t)\big| \leq |y_0 - z_0|. \tag{7}$$

Ευστάθεια: *f* dissipative ένα απλό παράδειγμα

Αν η f είναι γραμμική ως προς y, $f(t, y) = \lambda(t)y + \mu(t)$, τότε προφανώς ικανοποιεί την συνθήκη (6), αν και μόνο αν η $\lambda(t)$ είναι ≤ 0

$$\begin{aligned} y' &= \lambda(t)y, \quad a \leq t \leq b, \quad \lambda \leq 0, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{8}$$

- στην γενική (μη γραμμική) περίπτωση η ευστάθεια ελέγχεται παίρνοντας την διαφορά δυο λύσεων, στην γραμμική περίπτωση ΑΡΚΕΙ να μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας λύσης της ομογενούς εξίσωσης. Αυτό επειδή:
- η διαφορά δυο λύσεων της (8) είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης.
- Παρατηρούμε ότι το μ δεν επηρεάζει τις ιδιότητες ευστάθειας.
- Η εκτίμηση ευστάθειας (7) γίνεται

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| y(t) \right| \leq |y_0|, \tag{9}$$

ή

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| e(t) \right| \leq |e_0|, \tag{10}$$

Συστήματα ΣΔΕ

Τα προηγούμενα αποτελέσματα γενικεύονται κατευθείαν σε συστήματα ΣΔΕ: Εστω $m \in \mathbb{N}$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, και $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε μια διανυσματική συνάρτηση

$$y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big), \quad a \le t \le b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{11}$$

- Υπαρξη - Μοναδικότητα
- Ευστάθεια - Νόρμες διανυσμάτων

Ένα απλό ενδιαφέρον παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= Ay(t), \quad t \geq 0, \\
y(0) &= y_0,
\end{aligned} \tag{12}
$$

όπου ο 2×2 πίνακας είναι της μορφής

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, ο A μπορεί να γραφεί ως

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή σαν γραμμικός συνδυασμός, ενός συμμετρικού και ενός αντί-συμμετρικού πίνακα. Τότε προκύπτει

$$(Ax, x) = \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\alpha \pm \beta$i, δηλαδή, λ και $\bar{\lambda}$. Επιπλέον, ο A είναι αρνητικά ήμι-ορισμένος αν και μόνο αν το $\alpha \leq 0$.