Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι: Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad a \le t \le b, \\ &y(a) = y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη α$y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (1).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Γραμμικές Εξισώσεις

Όταν η f είναι πολυώνυμο βαθμού ένα ως προς την μεταβλητή y, η αντίστοιχη ΣΔΕ λέγεται *γραμμική* και το πρόβλημα (1) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda(t)y(t) + \mu(t), \quad a \le t \le b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

- αν $\lambda, \mu \in C[a, b]$, τότε το (2) έχει μια μοναδική λύση y:

$$y(t) = e^{\int_a^t \lambda(s)\,ds}\Big[y_0 + \int_a^t \mu(s)e^{-\int_a^s \lambda(\tau)\,d\tau}\,ds\Big], \quad a \le t \le b, \tag{3}$$

δηλαδή,

$$y(t) = e^{\int_a^t \lambda(s)\,ds}y_0 + \int_a^t \mu(s)e^{\int_s^t \lambda(\tau)\,d\tau}\,ds, \quad a \le t \le b.$$

Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Όταν $\lambda = 0$, η εξίσωση λύνεται με απλή ολοκλήρωση.

- Διαφορετικά $y'(s) - \lambda(s)y(s) = \mu(s)$ ή

$$\left(e^{-\int_a^s \lambda(\tau)\, d\tau} y(s)\right)' = e^{-\int_a^s \lambda(\tau)\, d\tau} \mu(s).$$

ολοκληρώνοντας από το a έως το t, παίρνουμε την (3).

Γενικό f, Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} y' &= y^2, \quad 0 \le t \le 2, \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Υποθέτοντας ότι η y υπάρχει, βλέπουμε εύκολα ότι $y(t) \geq 1$. Αφού $y'(t) \geq 0$, προκύπτει ότι η y είναι αύξουσα και $y(0) = 1$. Επομένως η ΔΕ γίνεται

$$\frac{y'(t)}{\big(y(t)\big)^2} = 1 \iff -\frac{d}{dt}\frac{1}{y(t)} = 1.$$

Ολοκληρώνοντας από το 0 έως το t, προκύπτει

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t \iff y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

- $y(t) \to \infty$ όταν $t \to 1^-$.
- Συνεπώς, δέν υπάρχει λύση της (4) στο διάστημα $[0, 2]$.
- Σημειώστε ότι η f στην (4), $f(t, y) = y^2$, είναι όσο ομαλή μπορεί να γίνει. Συνεπώς η ομαλότητα της f δεν αρκεί για την ύπαρξη λύσεων του προβλήματος ΑΤ.

Γενική f, Παράδειγμα 2

Το ΠΑΤ

$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{|y|}, \quad 0 \le t \le 1, \\
y(0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

έχει άπειρες λύσεις:

$$
y(t) := 0, \quad 0 \le t \le 1, \quad \text{και} \quad y(t) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t \le t^*, \\ \dfrac{(t - t^*)^2}{4}, & t^* < t \le 1, \end{cases}
$$

για κάθε $t^* \in (0, 1)$.

- Κάθε λύση y του ΠΑΤ (5) είναι αύξουσα συνάρτηση .
- Αν η y μηδενίζεται στο διάστημα $[0, t^*]$ και δεν μηδενίζεται σε μια περιοχή στα δεξιά του t^*, είναι θετική στο $(t^*, 1]$.
- Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την ΣΔΕ στην μορφή

$$
y'(t) = \sqrt{y(t)} \iff \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = 1 \iff 2\Big(\sqrt{y(t)}\Big)' = 1 \, .
$$

- Σημειώστε ότι σ' αυτήν την περίπτωση η f, $f(t, y) = \sqrt{|y|}$, είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη (ούτε Lipschitz συνεχής) στο $y = 0$.

Θεωρία Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι η $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και ικανοποιεί την συνθήκη* Lipschitz *ως προς* y, *ομοιόμορφα ώς προς* t, *δηλαδή: Υπάρχει* $L \geq 0$ *τώ*

$$\big| f(t, y_1) - f(t, y_2) \big| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in [a, b] \;\; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Τότε, για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, *το ΠΑΤ* (1) *έχει μια και μοναδική λύση.* □

- η σταθερά L είναι η ίδια για όλα τα $t \in [a, b]$και τα $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
- Η απόδειξη στηρίζεται στην εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach στην σχέση

$$y = Ty \tag{7}$$

η οποία προκύπτει από την (1), με $T : C[a, b] \to C[a, b]$,

$$Tx(t) := (Tx)(t) := y_0 + \int_a^t f\big(s, x(s)\big)\, ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Παρατηρήσεις

- Η συνθήκη (6) καλείται “ολική” συνθήκη Lipschitz, γιατί απαιτείται για όλα τα $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
- Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει μοναδικότητα σ’ όλο το διάστημα $[a, b]$.
- Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (6) από μια τοπική συνθήκη Lipschitz, η οποία είναι πολύ πιο ρεαλιστική υπόθεση και μας εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα σε ένα κατ αρχήν μικρότερο διάστημα $[a, b']$, όπου b', ανήκει στο $[a, b]$.

Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων

Θεώρημα

Έστω $c > 0$ *και* $f \in C\big([a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c]\big)$. *Αν η* f *ικανοποιεί την τοπική συνθήκη Lipschitz, ώς προς* y, *στο* $[a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$, *ομοιόμορφα ώς προς* t, *δηλ.,*
Υπάρχει $L \geq 0$ *τώ*

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } t \in [a,b] \quad \text{και} \quad \text{για κάθε } y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c] \\ &\big|f(t,y_1) - f(t,y_2)\big| \leq L|y_1 - y_2|, \end{aligned} \tag{8}$$

τότε το ΠΑΤ (1) *επιλύεται μονοσήμαντα σε ένα διάστημα* $[a, b']$, *όπου*

$$b' := \min\Big(b, a + \frac{c}{A}\Big),$$

και

$$A := \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ y_0 - c \leq y \leq y_0 + c}} \big|f(t,y)\big|. \qquad \square$$