

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Εργαστηριακή Άσκηση
Προθεσμία: 12-6-2019

1. Θεωρούμε το σύστημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}x'(t) &= -y(t), & t \in [0, 1] \\y'(t) &= x(t), & t \in [0, 1] \\x(0) &= 1, & y(0) = 0.\end{aligned}$$

- (a) Δείξτε ότι η ακριβής λύση του προβλήματος ικανοποιεί $x^2(t) + y^2(t) = 1$.
- (b) Γράψτε το σύστημα στην διανυσματική μορφή $X'(t) = AX(t)$ όπου A , κατάλληλος πίνακας και $X(t) = (x(t), y(t))^T$. Δείξτε ότι $(A\Psi, \Psi) = 0$ για κάθε $\Psi \in \mathbb{R}^2$ (Εδώ το (\cdot, \cdot) συμβολίζει το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2).
- (c) Να λύσετε προσεγγιστικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler σε ομοιόμορφη διαμέριση 100 και 200 σημείων.
- (d) Να λύσετε προσεγγιστικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο του τραπεζίου σε ομοιόμορφη διαμέριση 100 και 200 σημείων.
- (e) Να λύσετε προσεγγιστικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την κλασσική μέθοδο των Runge-Kutta τέταρτης τάξης σε ομοιόμορφη διαμέριση 100 και 200 σημείων.
- (f) Να λύσετε προσεγγιστικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Gauss-Legendre, $q=2$ σε ομοιόμορφη διαμέριση 100 και 200 σημείων.
- (g) Να αναπαραστήσετε σε κοινά γραφήματα τις τις αντίστοιχες τιμές του $(x^n)^2 + (y^n)^2$. Πώς συμπεριφέρεται η ποσότητα $(x^n)^2 + (y^n)^2$ καθώς το n αυξάνει;

2. Θεωρούμε το σύστημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}x'(t) &= -5x(t) - 2y(t), & t \in [0, 1] \\y'(t) &= -2x(t) - 10y(t), & t \in [0, 1] \\x(0) &= 1, & y(0) = 1.\end{aligned}$$

- (a) Γράψτε το σύστημα στην διανυσματική μορφή $X'(t) = AX(t)$ όπου A , κατάλληλος πίνακας και $X(t) = (x(t), y(t))^T$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2|ab| \leq a^2 + b^2$, δείξτε ότι $(A\Psi, \Psi) \leq 0$ για κάθε $\Psi \in \mathbb{R}^2$ (Εδώ το (\cdot, \cdot) συμβολίζει το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2).
- (b) Δείξτε ότι το δεξιό μέλος f στο παραπάνω σύστημα ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.
- (c) Να λύσετε προσεγγιστικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο του τραπεζίου σε ομοιόμορφη διαμέριση 100 και 200 σημείων.
- (d) Να λύσετε προσεγγιστικά το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την έμμεση μέθοδο του Euler σε ομοιόμορφη διαμέριση 100 και 200 σημείων..
- (e) Πώς συμπεριφέρεται η ποσότητα $(x^n)^2 + (y^n)^2$ καθώς το n αυξάνει;