Άσκηση 3 (Κίνηση με τριβή σε σφαίρα)**.** Έστω σώμα μάζας m το οποίο κινείται σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R. (α) Θεωρήστε ότι στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις, βρείτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες και (i) γράψτε την Λαγκρανζιανή, (ii) γράψτε τις εξισώσεις κίνησης, (iii) βρείτε μία διατηρήσιμη ποσότητα (σταθερή κατά την κίνηση). (β) Θεωρήστε τώρα ότι το ίδιο σώμα δέχεται μία δύναμη τριβής $\boldsymbol{f} = -\lambda\,\boldsymbol{v}$, όπου λ είναι μία θετική σταθερά και $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητά του. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησής του.

Επίλυση. (α) Έστω (x, y, z) οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σώματος και ας ορίσουμε σφαιρικές συντεταγμένες (R, θ, ϕ) από τις σχέσεις

$$x = R\sin\theta\cos\phi, \quad y = R\sin\theta\sin\phi, \quad z = R\cos\theta.$$

Η θέση του σώματος είναι $\boldsymbol{r} = R\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$.

Από την $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}$ βρίσκουμε

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}, \qquad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}{\partial\phi} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}.$$

Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = R\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = R\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right) = R(\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi).$$

(i) Η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2).$$

(ii) Έχουμε δύο εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) = mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 \Rightarrow \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = 0\\
\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}(mR^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}) = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Διατηρείται η ποσότητα

$$J := \sin^2\theta\,\dot{\phi}.$$

(β)

$$\boldsymbol{f} = -\lambda\boldsymbol{v} = -\lambda R(\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi).$$

Έχουμε τις γενικευμένες δυνάμεις τριβής

$$\begin{aligned}
Q'_\theta &= \boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = R\boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial\theta} = R(\boldsymbol{f}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\theta) = -\lambda R^2\dot{\theta}\\
Q'_\phi &= \boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi} = R\boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial\phi} = R\sin\theta(\boldsymbol{f}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\lambda R^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}.
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τις παραπάνω γενικευμένες δυνάμεις στο δεξιό μέλων των εξισώσεων Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) = mR^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - \lambda R^2\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = 0\\
&\frac{d}{dt}(mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = -\lambda R^2\sin\theta\,\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sin^2\theta\,\dot{\phi}) = -\frac{\lambda}{m}\sin^2\theta\,\dot{\phi}.
\end{aligned}$$