Άσκηση 2 (Δύναμη τριβής σε εκκρεμές)**.** Έστω ένα σωμάτιο μάζας m το οποίο βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας της Γης και εξαρτάται από ράβδο μήκους ℓ η οποία είναι προσαρμοσμένη σε σταθερό σημείο στο άκρο της. Μία επιπλέον δύναμη τριβής $\boldsymbol{f} = -\lambda\,\boldsymbol{v}$ ασκείται σε αυτό το σωμάτιο, όπου λ είναι μία θετική σταθερά και $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητά του. (α) Βρείτε γενικευμένες συντεταγμένες οι οποίες περιγράφουν το σύστημα και γράψτε την κινητική και την δυναμική ενέργεια. (β) Εξάγετε τις εξισώσεις κίνησης. (γ) Βρείτε μία εξίσωση για την χρονική εξέλιξη της ενέργειας του εκκρεμούς (dE/dt).

Επίλυση. (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τις συνήθεις πολικές συντεταγμένες (ℓ, θ). Προσέξτε ότι στην θέση ισορροπίας της μάζας, η οποία είναι στην κατακόρυφη θέση, έχουμε $\theta = -\pi/2$.

Η κινητική και δυναμική ενέργεια είναι, αντίστοιχα,

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2, \qquad V = mg\ell\sin\theta.$$

Η δυναμική ενέργεια παίρνει την τιμή $V = 0$ στην θέση $\theta = 0$ όπου η ράβδος είναι σε οριζόντια θέση (και όχι στην κατακόρυφη θέση ισορροπίας, όπως συνήθως συμβαίνει σε προβλήματα με το εκκρεμές).

(β) Η Λαγκρανζιανή είναι $L = T - V$. Έχουμε μία εξίσωση Euler-Lagrange στην οποία θα περιλάβουμε και την δύναμη τριβής,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} + Q'_\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = -mg\ell\cos\theta + Q'_\theta.$$

Η Q'_θ είναι η γενικευμένη δύναμη τριβής και δίνεται από την

$$Q'_\theta = \sum_i f_i\frac{\partial x_i}{\partial\theta} = \boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου στην τελευταία ισότητα. Εφόσον $\boldsymbol{r} = \ell\,\hat{\boldsymbol{e}}_r$, και χρησιμοποιώντας την $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, βρίσκουμε $\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta = \ell\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$. Άρα η γενικευμένη δύναμη είναι

$$Q'_\theta = \ell\boldsymbol{f}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\theta.$$

Η ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες είναι $\boldsymbol{v} = \ell\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, άρα έχουμε $\boldsymbol{f} = -\lambda\ell\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ και

$$Q'_\theta = -\lambda\ell^2\dot{\theta}.$$

Αντικαθιστούμε αυτό το αποτέλεσμα στην εξίσωση Euler-Lagrange και παίρνουμε την εξίσωση κίνησης

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\cos\theta = 0.$$

Ας δούμε μία δεύτερη μέθοδο για να εξάγουμε την γενικευμένη δύναμη Q'_θ. Η δύναμη τριβής είναι

$$\boldsymbol{f} = -\lambda\,\boldsymbol{v} = -\lambda\ell\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\lambda\ell\dot{\theta}(-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{\jmath}}).$$

Επίσης για τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο (x_1, x_2) έχουμε

$$\begin{cases} x_1 &= \ell\cos\theta \\ x_2 &= \ell\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial\theta} &= -\ell\sin\theta \\ \frac{\partial x_2}{\partial\theta} &= \ell\cos\theta \end{cases}$$

Ωστε η δύναμη τριβής είναι

$$Q'_\theta = \sum_i f_i\frac{\partial x_i}{\partial\theta} = f_1\frac{\partial x_1}{\partial\theta} + f_2\frac{\partial x_2}{\partial\theta} = (\lambda\ell\dot{\theta}\sin\theta)(-\ell\sin\theta) + (-\lambda\ell\dot{\theta}\cos\theta)(\ell\cos\theta) = -\lambda\ell^2\dot{\theta}$$

και βέβαια συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω.

(γ) Η ενέργεια είναι

$$E = T + V.$$

Παίρνουμε την χρονική παράγωγο

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\ddot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\dot{\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + mg\ell\cos\theta\,\dot{\theta} = m\ell^2\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)\dot{\theta}.$$

όπου λάβαμε υπόψιν ότι $T = T(\dot{\theta}),\ V = V(\theta)$. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κίνησης και έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda\ell^2\,\dot{\theta}^2.$$