ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

ΟΜΑΔΑ Α

ΘΕΜΑ 1ο

$A = \{$εξάρτημα τύπου $A\}$

$B = \{$εξάρτημα τύπου $B\}$

$\Gamma = \{$εξάρτημα τύπου $\Gamma\}$

$E = \{$ελαττωματικό εξάρτημα$\}$

α) $$P(A \setminus E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \setminus A) \cdot P(A)}{P(E)} \qquad (1)$$

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap \Gamma) =$$

$$= P(E \setminus A) \cdot P(A) + P(E \setminus B) \cdot P(B) + P(E \setminus \Gamma) \cdot P(\Gamma) =$$

$$= \frac{5}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{4}{100} \cdot \frac{35}{100} + \frac{2}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{25 + 28 + 16}{2000} =$$

$$= \frac{69}{2000}$$

Οπότε, από την (1) προκύπτει:

$$P(A \setminus E) = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{25}{100}}{\frac{69}{2000}} = \frac{25/2000}{69/2000} = \frac{25}{69}$$

β) $$P(B \setminus E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \setminus B) \cdot P(B)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{100} \cdot \frac{35}{100}}{69/2000} =$$

$$= \frac{\frac{28}{2000}}{\frac{69}{2000}} = \frac{28}{69}$$

γ) $P(\Gamma \backslash E) = 1 - P(A\backslash E) - P(B\backslash E) = 1 - \frac{25}{69} - \frac{28}{69} = \frac{16}{69}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2ο}}$

$E = \{$ο Γ έχει 4 σπαθιά$\}$

$F = \{$οι Α και Β έχουν μαζί 6 σπαθιά$\}$

Ζητάμε την $P(E\backslash F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$, η οποία (επειδή οι δυνατοί τρόποι να μοιραστούν τα χαρτιά σε 4 παίχτες έτσι ώστε ο καθένας να πάρει 13 είναι ισοπίθανοι) είναι ίση με $P(E\backslash F) = \dfrac{|E\cap F|}{|F|}$

$$|F| = \underbrace{\binom{13}{6}\binom{39}{20}}_{\substack{\text{26άδες με}\\ \text{6 σπαθιά}\\ \text{για τους}\\ \text{Α \& Β μαζί}}} \underbrace{\binom{26}{13}}_{\substack{\text{κάθε}\\ \text{26άδα}\\ \text{των Α και Β}\\ \text{μαζί, μπορεί}\\ \text{να διαιρεθεί}\\ \text{σε δύο 13άδες}\\ \text{με } \binom{26}{13} \text{ τρόπους}}} \underbrace{\binom{26}{13}\binom{13}{13}}_{\substack{\text{δυνατοί τρόποι}\\ \text{που μοιράζονται}\\ \text{τα υπόλοιπα 26}\\ \text{χαρτιά στους Γ και Δ}}}$$

$$|E \cap F| = \underbrace{\binom{13}{6}\binom{39}{20}\binom{26}{13}}_{\substack{\text{ίδια με}\\ \text{παραπάνω}}} \underbrace{\binom{7}{4}\binom{19}{9}}_{\substack{\text{δυνατοί τρόποι}\\ \text{με τους οποίους}\\ \text{ο Γ παίρνει 4 από}\\ \text{τα υπόλοιπα 7 σπαθιά}\\ \text{που υπήρχαν στην 26άδα}}} \binom{13}{13}$$

Άρα: $P(E \setminus F) = \dfrac{\binom{7}{4}\binom{19}{9}}{\binom{26}{13}}$

<u>2ος Τρόπος:</u>

Περιορισμός του δειγματικού χώρου στα 26 χαρτιά που απομένουν όταν οι A και B μαζί πάρουν 26 χαρτιά με 6 σπαθιά.

$G = \{$ο Γ έχει 4 σπαθιά$\}$

Διαμέριση των 26 εναπομείναντων χαρτιών: $\begin{cases} 7 & \text{σπαθιά} \\ 19 & \text{μη-σπαθιά} \end{cases}$

$P(G) = P(\{$επιλογή 13άδας με 4 σπαθιά και 9 μη-σπαθιά$\}) =$

$$= \frac{\binom{7}{4}\binom{19}{9}}{\binom{26}{13}}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3ο}}$ (δείτε και Άσκηση 1, Φυλλάδιο 5ο)

$\underline{\Omega} = \{$όλες οι δυνατές 8άδες που επιλέγονται από 22 παίχτες χωρίς επανατοποθέτηση & χωρίς ενδιαφέρον για τη διάταξη τους$\}$

Άρα: $|\underline{\Omega}| = \binom{22}{8}$, με την ίδια πιθανότητα $p = \dfrac{1}{\binom{22}{8}}$ για κάθε 8άδα

$E = \{$τουλάχιστον 2 παίχτες (1 ζευγάρι) με τον ίδιο αριθμό φανέλας στην 8άδα$\}$

$P(E) = 1 - P(E^c)$, όπου $E^c = \{$κανένα ζευγάρι παιχτών με τον ίδιο αριθμό φανέλας$\}$

$$P(E) = 1 - \frac{|E^c|}{|\Omega|}$$ (μιας και κάθε 8άδα έχει την ίδια πιθανότητα)

Θεωρούμε τη διαμέριση των 22 παιχτών σε 11 κλάσεις, δηλαδή στα 11 νούμερα των φανελών τους. Από τις κλάσεις αυτές, μπορούμε να διαλέξουμε 8 με $\binom{11}{8}$ τρόπους. Για κάθε τέτοια 8άδα μπορούμε να διαλέξουμε 1 παίχτη από κάθε κλάση με
$\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{1} = 2^8$ τρόπους.

Άρα, συνολικά έχουμε $\binom{11}{8} \cdot 2^8$ δυνατές 8άδες χωρίς κανένα ζευγάρι παιχτών με ίδιο αριθμό φανέλας. Δηλ. $|E^c| = \binom{11}{8} \cdot 2^8$

Επομένως: $$P(E) = 1 - \frac{\binom{11}{8} \cdot 2^8}{\binom{22}{8}} = 1 - \frac{11!}{\cancel{8!}\,3!} \frac{\cancel{8!}\,14!}{22!} \cdot 2^8 =$$

$$= 1 - \frac{2^7}{3 \cdot 19 \cdot 17} = \frac{841}{969}$$

<u>2ος τρόπος</u>: Βλ. Άσκηση 1, Φυλλάδιο 5ο

ΘΕΜΑ 4ο

$\boxed{\substack{5\text{ K} \\ \text{από } 14}}$ $X =$ "κέρδος" του A

Άρα: $$X = \begin{cases} -1 & \text{για } n = 1 \\ \alpha^{n-1} & \text{για } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$P(X = -1) = P(\{\text{κόκκινος βόλος στην 1η δοκιμή}\}) = \frac{5}{14}$

$P(X = \alpha^{2-1}) = P(\{\text{όχι κόκκινος στην 1η δοκιμή και κόκκινος στη 2η δοκιμή}\}) =$
$= \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{14}$

$P(X=\alpha^{n-1}) = P(\{$όχι κόκκινος στις $(n-1)$ πρώτες δοκιμές και κόκκινος στη n-οστή δοκιμή$\}) = \left(\frac{9}{14}\right)^{n-1}\cdot\frac{5}{14}$

Άρα: $$P(X=k) = \begin{cases} \frac{5}{14}, & \text{για } k=-1 \quad (\text{δηλ. } n=1) \\ \left(\frac{9}{14}\right)^{n-1}\frac{5}{14}, & \text{για } k=\alpha^{n-1} \quad (\text{δηλ. } n=2,3,\dots) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $$\sum_k P(X=k) = \frac{5}{14} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{9}{14}\right)^{n-1}\frac{5}{14} \underset{m=n-2}{=}$$

$$= \frac{5}{14} + \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{9}{14}\right)^{m+1}\cdot\frac{5}{14} = \frac{5}{14}\cdot\left[1+\frac{9}{14}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{9}{14}\right)^{m}\right] =$$

$$= \frac{5}{14}\left(1+\frac{9}{14}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{14}}\right) = 1$$

Ενώ η ισχύς των άλλων ιδιοτήτων του ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας μιας δ.τ.μ. είναι προφανής, μιας και $P(X=k)\geq 0$ $\forall\, k\in\mathbb{R}$, και το $\{k\in\mathbb{R} : P(X=k)\neq 0\} = \{-1, \alpha^{2-1}, \alpha^{3-1}, \dots\}$ είναι ένα αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Για τη μέση τιμή της X, έχουμε: $EX = \sum_k k\cdot P(X=k) =$

$$= (-1)\cdot\frac{5}{14} + \sum_{n=2}^{\infty}\alpha^{n-1}\left(\frac{9}{14}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{5}{14}\right) = \frac{5}{14}\left[-1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{9\alpha}{14}\right)^{n-1}\right] =$$

$$\underset{m=n-2}{=} \frac{5}{14}\left[-1+\frac{9\alpha}{14}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{9\alpha}{14}\right)^{m}\right]$$

Το άθροισμα $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{9\alpha}{14}\right)^{m}$ συγκλίνει όταν $\left|\frac{9\alpha}{14}\right| < 1 \iff |\alpha| < \frac{14}{9}$

και είναι ίσο με $\frac{1}{1-9\alpha/14}$

Άρα: $EX = \frac{5}{14}\left(-1 + \frac{9\alpha}{14}\cdot\frac{1}{1-\frac{9\alpha}{14}}\right) =$

$$= \frac{5}{14}\left(-1 + \frac{9\alpha}{14-9\alpha}\right)$$

Ζητούμε την τιμή του α έτσι ώστε $EX=0$, δηλ. $\frac{9\alpha}{14-9\alpha} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9\alpha = 14 - 9\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{7}{9}}$ το οποίο ικανοποιεί και την $|\alpha| < \frac{14}{9}$.

Αν Z = "κέρδος" του B, τότε $Z = -X \Rightarrow EZ = -EX = 0$.
Άρα: $\alpha = \frac{7}{9}$

ΘΕΜΑ 5ο

X = πλήθος εμφανίσεων άσου στις 12 δοκιμές
Y = » » βαλέ » 12 »
Z = » » χαρτιού διαφορετικού από άσο & βαλέ στις 12 δοκιμές

$$P(X=k \setminus X+Y=m) = \frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=m)}$$

$$P(X+Y=m) = P(Z=12-m)$$

Ακολουθία 12 δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = {εμφάνιση χαρτιού διαφορετικού από άσο και βαλέ}, οπότε:
$P(\text{"επιτυχίας"}) = \frac{44}{52} = \frac{11}{13}$

Άρα: $P(X+Y=m) = P(Z=12-m) = P(\{(12-m) \text{ "επιτυχίες"}\}) =$

$$= \binom{12}{12-m} \cdot \left(\frac{11}{13}\right)^{12-m} \left(\frac{2}{13}\right)^{m} = \binom{12}{m} \left(\frac{2}{13}\right)^{m} \left(\frac{11}{13}\right)^{12-m}$$

Επίσης: $P(X=k, X+Y=m) = P(X=k, Y=m-k) =$

$$= P(X=k,\ Y=m-k,\ Z=12-m)$$

η οποία ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή με $n=12$ και $p_1 = \frac{1}{13}$, $p_2 = \frac{1}{13}$, $p_3 = \frac{11}{13}$. Άρα:

$$P(X=k, X+Y=m) = \frac{12!}{k!\,(m-k)!\,(12-m)!} \left(\frac{1}{13}\right)^{k} \left(\frac{1}{13}\right)^{m-k} \left(\frac{11}{13}\right)^{12-m} =$$

$$= \frac{12!}{(12-m)!\,m!} \cdot \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \left(\frac{1}{13}\right)^{m} \left(\frac{11}{13}\right)^{12-m} =$$

$$= \binom{12}{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{13}\right)^{m} \left(\frac{11}{13}\right)^{12-m}$$

Επομένως: $P(X=k \setminus X+Y=m) = \dfrac{\binom{12}{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{13}\right)^{m}\left(\frac{11}{13}\right)^{12-m}}{\binom{12}{m}\left(\frac{2}{13}\right)^{m}\left(\frac{11}{13}\right)^{12-m}} =$

$$= \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}, \quad m=0,1,\ldots,12, \quad k=0,\ldots,m$$

$$E(X \setminus X+Y=m) = \sum_{k=0}^{m} k \cdot P(X=k \setminus X+Y=m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} k \binom{m}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!\,k!} k =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(m-k)!\,(k-1)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} m \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ t=k-1}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^m m \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m-1}{t} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot m \cdot 2^{m-1} = \frac{m}{2} \quad , \quad m=0,1,\dots,12$$

ΟΜΑΔΑ Β

ΘΕΜΑ 1ο

A = {φοιτητής κατάγεται από πόλη με περισσότερους από 500,000 κατοίκους}
B = { » » » » που έχει από 50,000 έως 500,000 κατοίκους}
Γ = { » » » χωριό ή πόλη με λιγότερους από 50,000 κατοίκους}
Δ = { φοιτητής δεν γνωρίζει γλώσσα προγραμματισμού}

α) $$P(A \backslash \Delta) = \frac{P(A \cap \Delta)}{P(\Delta)} = \frac{P(\Delta \backslash A) \cdot P(A)}{P(\Delta)} \qquad (1)$$

$$P(\Delta) = P(\Delta \cap A) + P(\Delta \cap B) + P(\Delta \cap \Gamma) =$$

$$= P(\Delta \backslash A) \cdot P(A) + P(\Delta \backslash B) \cdot P(B) + P(\Delta \backslash \Gamma) \cdot P(\Gamma) =$$

$$= \frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} + \frac{8\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot \frac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{8+18+40}{100} = \frac{33}{50}$$

Αντικαθιστώντας στην (1), λαμβάνουμε:

$$P(A \backslash \Delta) = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{33}{50}} = \frac{4/50}{33/50} = \frac{4}{33}$$

β) $$P(B \backslash \Delta) = \frac{P(\Delta \cap B)}{P(\Delta)} = \frac{P(\Delta \backslash B) \cdot P(B)}{P(\Delta)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10}}{33/50} = \frac{9/50}{33/50} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$

γ) $$P(\Gamma \backslash \Delta) = 1 - P(A \backslash \Delta) - P(B \backslash \Delta) = 1 - \frac{4}{33} - \frac{9}{33} = \frac{20}{33}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2ο}}$

$E = \{\text{ο Γ έχει 1 ακριβώς άσο}\}$

$F = \{\text{οι Α και Β έχουν μαζί 2 ακριβώς άσους}\}$

Ζητάμε την $P(E \mid F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$, η οποία (επειδή οι δυνατοί τρόποι να μοιραστούν τα χαρτιά σε 4 παίκτες έτσι ώστε ο καθένας να πάρει 13 είναι ισοπίθανοι) είναι ίση με

$$P(E \mid F) = \frac{|E \cap F|}{|F|}$$

$$|F| = \underbrace{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}_{\substack{\text{26άδες με}\\ \text{2 άσους για}\\ \text{τους Α \& Β}\\ \text{μαζί}}} \underbrace{\binom{26}{13}}_{\substack{\text{κάθε}\\ \text{26άδα}\\ \text{των Α και Β}\\ \text{μπορεί να}\\ \text{διαιρεθεί}\\ \text{σε δύο 13άδες}\\ \text{με } \binom{26}{13} \text{ τρόπους}}} \underbrace{\binom{26}{13}\binom{13}{13}}_{\substack{\text{δυνατοί τρόποι}\\ \text{που μοιράζονται}\\ \text{τα υπόλοιπα 26}\\ \text{χαρτιά στους}\\ \text{Γ και Δ}}}$$

$$|E \cap F| = \underbrace{\binom{4}{2}\binom{48}{24}\binom{26}{13}}_{\substack{\text{ίδια με}\\ \text{παραπάνω}}} \underbrace{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}_{\substack{\text{δυνατοί τρόποι}\\ \text{με τους οποίους}\\ \text{ο Γ παίρνει 1}\\ \text{άσο από τους υπόλοιπους}\\ \text{2 άσους που υπήρχαν}\\ \text{στην 26άδα}}} \binom{13}{13}$$

Άρα: $P(E \mid F) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} = \dfrac{13}{25}$

2ος τρόπος:

Περιορισμός του δειγματικού χώρου στα 26 χαρτιά που απομένουν όταν οι A και B μαζί πάρουν 26 χαρτιά με 2 άσους.

$G = \{$ο Γ έχει 1 ακριβώς άσο$\}$

Διαμέριση των 26 εναπομείναντων χαρτιών $\begin{cases} 2 \text{ άσοι} \\ 24 \text{ μη-άσοι} \end{cases}$

$P(G) = P(\{$επιλογή 13άδας με 1 άσο και 12 μη-άσους$\}) =$

$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} = \frac{13}{25}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το πλήθος όλων των διατεταγμένων 8άδων που μπορούν να επιλεγούν από τα 13 χαρτιά με επανατοποθέτηση είναι: $|\underline{\Omega}| = 13^8$, και όλες αυτές οι 8άδες έχουν την ίδια πιθανότητα $p = 1/13^8$

$A = \{$τουλάχιστον 1 άσος στην 8άδα$\}$

$B = \{$8 διαφορετικά χαρτιά στην 8άδα$\}$

Ζητάμε την $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{|A\cap B|}{|B|}$

Όμως: $|B| =$ (πλήθος διατεταγμένων 8άδων με διαφορετικά χαρτιά) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |B| = (13)_8$

Επίσης: $|A\cap B| =$ (πλήθος διατεταγμένων 8άδων με 8 διαφορετικά χαρτιά και 1 ακριβώς άσο ανάμεσα τους)

Δηλαδή: $A \cap B = \{ \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ 12 \text{ επιλογές}}}{\underline{A}}\ \underset{\substack{\uparrow \\ 11 \text{ επιλογ.}}}{\underline{\text{όχι } A}}\ \underline{\text{όχι } A} \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ 6 \text{ επιλογ.}}}{\underline{\text{όχι } A}}}_{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = (12)_7},\ \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ 12 \text{ επιλ.}}}{\underline{\text{όχι } A}}\ \underline{A}\ \underset{\substack{\uparrow \\ 11 \text{ επιλογ.}}}{\underline{\text{όχι } A}} \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ 6 \text{ επιλογ.}}}{\underline{\text{όχι } A}}}_{(12)_7}, \ldots \}$

Άρα: $|A \cap B| = (12)_7 \cdot 8$

Επομένως $P(A|B) = \dfrac{(12)_7 \cdot 8}{(13)_8} = \dfrac{8}{13}$

<u>Σημείωση</u>: Αντί για τον υπολογισμό του $|A \cap B|$ όπως παραπάνω, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B)$

Οπότε $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{|A^c \cap B|}{|B|}$

όπου $|A^c \cap B| =$ (πλήθος διατεταγμένων 8άδων με διαφορετικά χαρτιά και χωρίς άσο) $=$ (πλήθος διατεταγμένων 8άδων με διαφορετικά χαρτιά που επιλέγονται από τους 12 μη-άσους)

$\Rightarrow |A^c \cap B| = (12)_8$

Άρα: $P(A|B) = 1 - \dfrac{(12)_8}{(13)_8} = 1 - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ } 4_o}$

$\{X=2\} = \{ΓΓ, KK\}$

$\Rightarrow P(X=2) = P(ΓΓ \cup KK) = P(ΓΓ) + P(KK) = P(Γ) \cdot P(Γ) + P(K) \cdot P(K) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\{X=3\} = \{ΚΓΓ,\ ΓΚΚ\} \Rightarrow P(X=3) = P(ΚΓΓ) + P(ΓΚΚ) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Γενικά: $\{X=m\} = \{\underbrace{\underline{Γ}\,\underline{Κ}\,\underline{Γ}\ldots\underline{Κ}}_{m-2}ΓΓ,\ \underbrace{\underline{Κ}\,\underline{Γ}\,\underline{Κ}\ldots\underline{Γ}}_{m-2}\underline{Κ}\,\underline{Κ}\}$

Άρα: $P(X=m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m$

Οπότε η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι η εξής:

$$f_X(m) = P(X=m) = \begin{cases} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m, & m=2,3,\ldots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατήρηση: $\sum_m f_X(m) = \sum_{m=2}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m \underset{k=m-2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{2-1} = 1$$

Οι άλλες δύο ιδιότητες του ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας μιας δ.τ.μ. ισχύουν προφανώς [δηλ. $f_X(m) \geq 0\ \forall\, m \in \mathbb{R}$ και το $\{m \mid f_X(m) \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμα άπειρο ή πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (εδώ το πρώτο)]

Για τη μέση τιμή της X έχουμε:

$$EX = \sum_m m\cdot f_X(m) = \sum_{m=2}^{\infty} m\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m \underset{k=m-2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1/2}{(1-1/2)^2}+\frac{2}{1-1/2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1/2}{(1/2)^2}+\frac{2}{1/2}\right]=3$$

Η πιθανότητα να σταματήσουμε σε άρτιο αριθμό ρίψεων υπολογίζεται ως:

$$P(X=\text{άρτιος})=\sum_{\substack{m=2\\ m=\text{άρτιος}}}^{\infty}P(X=m)\underset{\substack{\uparrow\\ m=2k}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\underset{\substack{\uparrow\\ n=k-1}}{=}2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/4}=\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ 5ο

12Κ
8Π, 10Μ

X = πλήθος κόκκινων βόλων στις 8 δοκιμές
Y = » πράσινων » » 8 »
Z = » μαύρων » » 8 »

$$P(X=k\mid X+Y=m)=\frac{P(X=k,\ X+Y=m)}{P(X+Y=m)}$$

Όμως: $P(X+Y=m)=P(Z=8-m)$

Θεωρούμε την ακολουθία 8 δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = {εμφάνιση μαύρου βόλου}, οπότε: $P(\text{"επιτυχίας"})=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

Άρα: $P(X+Y=m)=P(Z=8-m)=P(\{(8-m)\ \text{"επιτυχίες" ακριβώς}\})=$

$$=\binom{8}{8-m}\left(\frac{1}{3}\right)^{8-m}\left(\frac{2}{3}\right)^{m}=\binom{8}{m}\left(\frac{2}{3}\right)^{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{8-m}$$

Επίσης: $P(X=k, X+Y=m) = P(X=k, Y=m-k) =$

$$= P(X=k, Y=m-k, Z=8-m)$$

η οποία είναι πολυωνυμική πυκνότητα με $n=8$ και

$$p_1 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \quad , \quad p_2 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \quad , \quad p_3 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Άρα: $P(X=k, X+Y=m) = P(X=k, Y=m-k, Z=8-m) =$

$$= \frac{8!}{k!\,(m-k)!\,(8-m)!} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-m}$$

Επομένως $P(X=k \setminus X+Y=m) = \dfrac{\frac{\cancel{8!}}{k!\,(m-k)!\,\cancel{(8-m)!}} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{8-m}}{\frac{\cancel{8!}}{m!\,\cancel{(8-m)!}} \left(\frac{2}{3}\right)^m \left(\frac{1}{3}\right)^{8-m}} =$

$$= \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{m-k}}{\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{m-k}} = \binom{m}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{m-k}, \quad \begin{array}{l} m=0,1,\dots,8 \\ k=0,\dots,m \end{array}$$

η οποία είναι διωνυμική πυκνότητα με παραμέτρους $n=m$ και $p=3/5$

Ως εκ τούτου, η μέση τιμή $E[X=k \setminus X+Y=m]$ θα είναι ίση με $E[X=k \setminus X+Y=m] = np = \frac{3m}{5}$

Εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά ως εξής:

$$E[X=k \setminus X+Y=m] = \sum_{k=0}^{m} k \cdot P(X=k \setminus X+Y=m) = \sum_{k=0}^{m} k \binom{m}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{m-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(k-1)!\,(m-k)!} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{m-k} = m \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{m-k} \underset{t=k-1}{=}$$

$$= m \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m-1}{t} \left(\frac{3}{5}\right)^{t+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{m-t-1} = m \cdot \frac{3}{5} \sum_{t=0}^{m-1} \binom{m-1}{t} \left(\frac{3}{5}\right)^t \left(\frac{2}{5}\right)^{m-1-t} =$$

$$= \frac{3m}{5} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)^{m-1} = 3m/5$$