ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 11ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Εξ' ορισμού, η συνάρτηση κατανομής $\Phi(x)$ της τυπικής κανονικής πυκνότητας $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$, είναι ίση με:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \Phi(0) + \int_{0}^{x} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, d\xi$$

Όμως, $\Phi(0) = 1/2$ μιας και η $\varphi(x)$ είναι συμμετρική.

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε $y = \xi/\sqrt{2}$, οπότε προκύπτει:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x/\sqrt{2}} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x/\sqrt{2}} e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{erf}\left(x/\sqrt{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

X = χρόνος διάσπασης (σε sec). Τότε $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

και $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Αφού το 50% διασπώνται στη διάρκεια του 1ου δευτερολέπτου, τότε

$$P(X\leq 1)=\frac{1}{2} \Rightarrow F(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-e^{-\lambda}=\frac{1}{2} \Rightarrow e^{\lambda}=2 \Rightarrow \lambda=\ln 2$$

Αν t ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπαστεί το 75% των σωματιδίων τότε: $P(X\leq t)=\frac{3}{4} \Rightarrow F(t)=\frac{3}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1-e^{-\lambda t}=\frac{3}{4} \Rightarrow e^{\lambda t}=4 \Rightarrow t=\frac{\ln 4}{\lambda} \Rightarrow t=\frac{\ln 4}{\ln 2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αφού η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, θα έχει τη συνάρτηση πυκνότητας: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

Η άσκηση λύνεται εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 (σελ. 143) με διάστημα $I=(0,\infty)$ (διάστημα τέτοιο ώστε $f(x)=0$ αν $x\notin I$)

α) $y=\varphi(x)=e^{x}$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο I

Η αντίστροφη της φ είναι η $x=\varphi^{-1}(y)=\ln y$, οπότε

$$f_Y(y)=f(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|=\lambda e^{-\lambda\ln y}\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{\lambda}{y}e^{\ln y^{-\lambda}}=$$

$$=\frac{\lambda}{y^{\lambda+1}} \text{ για } 0<x<\infty \Rightarrow 0<\ln y<\infty \Rightarrow 1<y<\infty$$

Άρα $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{y^{\lambda+1}}, & y>1\\ 0, & y\leq 1\end{cases}$

β) $z=\varphi(x)=\ln x$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο I

$x=\varphi^{-1}(z)=e^{z}$

$$f_Z(z) = f(\varphi^{-1}(z)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} \right| = \lambda e^{-\lambda e^z} |e^z| = \lambda e^{z-\lambda e^z}$$

για $0 < x < \infty \Rightarrow 0 < e^z < \infty \Rightarrow -\infty < z < \infty$

Άρα $f_Z(z) = \lambda e^{z-\lambda e^z}, \quad -\infty < z < \infty$

γ) $w = \varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο I (μιας και $\varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \ \forall \ x \geq 0$)

$$x = \varphi^{-1}(w) = \frac{1}{w} - 1 = \frac{1-w}{w}$$

$$f_W(w) = f(\varphi^{-1}(w)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(w)}{dw} \right| = \lambda e^{-\lambda(1-w)/w} \left| -\frac{1}{w^2} \right| = \frac{\lambda}{w^2} \exp\left[-\frac{\lambda(1-w)}{w}\right]$$

για $0 < x < \infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{w} - 1 < \infty \Rightarrow 1 < \frac{1}{w} < \infty \Rightarrow 0 < w < 1$

Άρα
$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{\lambda}{w^2} \exp\left(-\lambda \frac{1-w}{w}\right), & \text{για } w \in (0,1) \\ 0, & \text{για } w \notin (0,1) \end{cases}$$

δ) $r = \varphi(x) = \alpha x + b$ είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα εάν $\alpha > 0$ ή γνησίως φθίνουσα εάν $\alpha < 0$) στο I

$$x = \varphi^{-1}(r) = \frac{r-b}{\alpha}$$

$$f_R(r) = f(\varphi^{-1}(r)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(r)}{dr} \right| = \lambda e^{-\lambda(r-b)/\alpha} \left| \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{\lambda}{|\alpha|} \exp\left(-\lambda \frac{r-b}{\alpha}\right)$$

για $0 < x < \infty \Rightarrow 0 < \frac{r-b}{\alpha} < \infty \Rightarrow \frac{b}{\alpha} < \frac{r}{\alpha} < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b<r<\infty, & \text{αν } \alpha>0 \\ -\infty<r<b, & \text{αν } \alpha<0 \end{cases}$$

Άρα: $f_R(r)=\begin{cases} \frac{\lambda}{\alpha}\exp\left(-\lambda\cdot\frac{r-\alpha}{b}\right), & r>b \\ 0, & r\leq b \end{cases}$, εάν $\alpha>0$

$f_R(r)=\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha}\exp\left(-\lambda\cdot\frac{r-\alpha}{b}\right), & r<b \\ 0, & r\geq b \end{cases}$, εάν $\alpha<0$

i) Αν η X ακολουθεί <u>ομοιόμορφη</u> κατανομή, θα έχει τη συνάρτηση πυκνότητας: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-\alpha}, & \alpha<x<b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

iα) $y=\varphi(x)=e^x$, $x=\varphi^{-1}(y)=\ln y$

$f_Y(y)=f(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|=\frac{1}{b-\alpha}\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{y(b-\alpha)}$, για $\alpha<x<b\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha<\ln y<b \Rightarrow e^\alpha<y<e^b$

Άρα: $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y(b-\alpha)}, & e^\alpha<y<e^b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

iβ) $z=\varphi(x)=\ln x$, $x=\varphi^{-1}(z)=e^z$

Η $\varphi(x)$ έχει γενικά ως πεδίο τιμών το $\varphi(I)=(-\infty,\infty)$ το οποίο αντιστοιχεί σε $-\infty<\ln x<\infty \Rightarrow 0<x<\infty$, δηλ. $I=(0,\infty)$.
Εάν $\alpha<0$ τότε $\exists x\notin I$ για τα οποία $f(x)\neq 0$ και συνεπώς το θεώρημα 1 δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αντίθετα, εάν $\alpha\geq 0$, έχουμε:

$$f_Z(z)=f(\varphi^{-1}(z))\cdot\left|\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right|=\frac{e^z}{b-\alpha}\,,\quad \text{για } \alpha<x<b \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha<e^z<b \Rightarrow \ln\alpha<z<\ln b$ (όταν $\alpha=0$, τότε $-\infty<z<\ln b$)

Άρα: $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z}{b-\alpha}\,, & \ln\alpha<z<\ln b\\ 0\,, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$ για $b>\alpha\geq 0$

ιγ) $w=\varphi(x)=\frac{1}{1+x}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(-1,\infty)$, ενώ δεν ορίζεται για $x=-1$. Άρα, εάν $\alpha<-1<b$ τότε $f(-1)\neq 0$ αλλά $-1\notin I$ ($I=(-\infty,-1)$ ή $I=(-1,\infty)$) και το Θεώρημα 1 δεν εφαρμόζεται. Αντίθετα, εάν $\alpha<b\leq -1$ ή $-1\leq\alpha<b$, τότε

$$f_W(w)=f(\varphi^{-1}(w))\left|\frac{d\varphi^{-1}(w)}{dw}\right|=\frac{1}{b-\alpha}\left|-\frac{1}{w^2}\right|=\frac{1}{w^2(b-\alpha)}$$

όπου $\alpha<x<b \Rightarrow \alpha<\frac{1}{w}-1<b \Rightarrow \alpha+1<\frac{1}{w}<b+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{b+1}<w<\frac{1}{\alpha+1}$ (όταν $b=-1$ έχουμε $-\infty<w<\frac{1}{\alpha+1}$ ενώ όταν $\alpha=-1$ έχουμε $\frac{1}{b+1}<w<\infty$)

Άρα $$f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{w^2(b-\alpha)}\,, & \dfrac{1}{b+1}<w<\dfrac{1}{\alpha+1}\\ 0\,, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$ με $\alpha<b\leq -1$ ή $-1\leq\alpha<b$

ιδ) $r=\varphi(x)=\alpha x+b$, $x=\varphi^{-1}(r)=\frac{r-b}{\alpha}$

$$f_R(r)=\frac{1}{b-\alpha}\left|\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|(b-\alpha)}\quad \text{για } \alpha<x<b \Rightarrow \alpha<\frac{r-b}{\alpha}<b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\frac{b}{\alpha} < \frac{r}{\alpha} < b+\frac{b}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+b<r<\alpha b+b \ , & \text{αν } \alpha>0 \\ \alpha b+b<r<\alpha^2+b \ , & \text{αν } \alpha<0 \end{cases}$$

Άρα: $f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha b-\alpha^2} \ , & \text{για } \alpha^2+b<r<\alpha b+b \\ 0 \ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$, εάν $\alpha>0$

$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2-\alpha b} \ , & \text{για } \alpha b+b<r<\alpha^2+b \\ 0 \ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$, εάν $\alpha<0$

ii) Αν η X ακολουθεί <u>κανονική</u> κατανομή, τότε έχει πυκνότητα την:

$$f(x) = N(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] , \quad -\infty<x<\infty$$

iiα) $y=\varphi(x)=e^x$, $x=\varphi^{-1}(y)=\ln y$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{y} \ , \text{ για } -\infty<x<\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\infty<\ln y<\infty \Rightarrow 0<y<\infty$$

Άρα: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] , & y>0 \\ 0 \ , & y\leq 0 \end{cases}$

iiβ) $z=\varphi(x)=\ln x$

Επειδή η $\varphi(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,\infty)=I$ στο οποίο είναι και γνησίως αύξουσα, αλλά $\exists\ x\notin I$ για τα οποία $f(x)\neq 0$ (όλα τα $x\leq 0$) το θεώρημα 1 δεν εφαρμόζεται.

iiγ) $w=\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(-1,\infty)$, ενώ δεν ορίζεται για $x=-1$. Άρα $I=(-\infty,-1)$ ή $I=(-1,\infty)$. Ωστόσο, $f(-1)\neq 0$ και $-1\notin I$, οπότε το θεώρημα 1 δεν εφαρμόζεται.

iiδ) $r=\varphi(x)=\alpha x+b$, $x=\varphi^{-1}(r)=\dfrac{r-b}{\alpha}$

$$f_R(r)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(\frac{r-b}{\alpha}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]\cdot\frac{1}{|\alpha|}\ ,\ \text{για}\ -\infty<x<\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\infty<\frac{r-b}{\alpha}<\infty \Rightarrow -\infty<\frac{r}{\alpha}<\infty \Rightarrow -\infty<r<\infty$$

Άρα: $$f_R(r)=\frac{1}{\sigma|\alpha|\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(r-b-\alpha\mu)^2}{2\sigma^2\alpha^2}\right]=N(r;b+\alpha\mu,\sigma^2\alpha^2)$$

iii) Αν η X έχει πυκνότητα Cauchy, τότε $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<\infty$

iiiα) $y=\varphi(x)=e^x$, $x=\varphi^{-1}(y)=\ln y$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi[1+(\ln y)^2]}\ ,\ \text{για}\ -\infty<\ln y<\infty \Rightarrow 0<y<\infty$$

Άρα: $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi[1+(\ln y)^2]}\ , & y>0\\ 0\ , & y\leq 0\end{cases}$$

(iiiβ) και (iiiγ) ομοίως με (iiβ) και (iiγ) αντίστοιχα

iiiδ) $r=\varphi(x)=\alpha x+b$, $x=\varphi^{-1}(r)=\dfrac{r-b}{\alpha}$

$$f_R(r) = \frac{1}{\pi\left[1+\left(\frac{r-b}{\alpha}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\pi\left[\alpha^2+(r-b)^2\right]}, \quad -\infty < r < \infty$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) $$\Gamma(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } x_m>0 \text{ το σημείο του} \\ \text{μεγίστου τότε}\end{array}\right\}$ $\Gamma'(x_m;\alpha,\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[(\alpha-1)x_m^{\alpha-2} - \lambda x_m^{\alpha-1}\right]e^{-\lambda x_m} =$

$= 0 \Rightarrow \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_m^{\alpha-2} e^{-\lambda x_m}\left[(\alpha-1) - \lambda x_m\right] = 0 \Rightarrow \alpha-1 = \lambda x_m \Rightarrow x_m = \frac{\alpha-1}{\lambda}$

και

$$\Gamma''(x;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-3} e^{-\lambda x}\left[(\alpha-2-\lambda x)(\alpha-1-\lambda x) - \lambda x\right]$$

Άρα $$\Gamma''(x_m;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\right)^{\alpha-3} e^{-(\alpha-1)}\left[-\cancel{\lambda}\frac{(\alpha-1)}{\cancel{\lambda}}\right] < 0$$

Επομένως, η $\Gamma(\alpha,\lambda) = \Gamma(x;\alpha,\lambda)$ έχει μέγιστο στο $x_m = \frac{\alpha-1}{\lambda}$

β) Έστω $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα $\forall\, x>0$ $\left(\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \ \forall\, x>0\right)$

Άρα: $x = \varphi^{-1}(y) = y^2$

$$f_Y(y) = \Gamma(\varphi^{-1}(y);\alpha,\lambda)\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{2(\alpha-1)} e^{-\lambda y^2}\cdot|2y|$$

για $0 < x < \infty \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \infty \Rightarrow 0 < y < \infty$

Άρα: $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{2\alpha-1} e^{-\lambda y^2} & , \quad y>0 \\ 0 & , \quad y\leq 0 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x^2/2} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\leq 0 \end{cases}$, οπότε η πυκνότητα δίνεται ως:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} xe^{-x^2/2} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\leq 0 \end{cases}$$

α) $$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \int_0^\infty x\left(-e^{-x^2/2}\right)'dx =$$

$$=\left[-xe^{-x^2/2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(-x)}{e^{x^2/2}}\right] + \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\frac{(-1)}{xe^{x^2/2}} + \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx =$$

$$=\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

β) $$E\left(\frac{1}{X}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) $f(x) = N(x;0,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) =$$

$$= \int_{-y}^{y} f(x)\,dx = \int_{-y}^{y} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx = 2\int_0^y \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx \quad , \quad y > 0$$

Άρα: $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y \le 0 \end{cases}$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την EY είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό: $EY = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy$, είτε από τη σχέση:

$EY = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$. Άρα: $EY = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} y e^{\frac{-y^2}{2\sigma^2}} dy =$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sigma^2 \left(-e^{-y^2/2\sigma^2}\right)' dy = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-y^2/2\sigma^2}\right]_0^{\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$\mathrm{Var}\,Y = EY^2 - (EY)^2$, όπου $EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy =$

$$= \int_0^{\infty} y^2 \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y \cdot \left(-e^{-y^2/2\sigma^2}\right)' dy =$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-y\, e^{-y^2/2\sigma^2}\right]_0^\infty + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2/2\sigma^2}\,dy =$$

$$= 0 + 2\sigma^2\int_0^\infty \frac{e^{-y^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dy = \sigma^2\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-y^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dy =$$

$$= \sigma^2\int_{-\infty}^\infty N(y;0,\sigma^2)\,dy = \sigma^2$$

Άρα: $\operatorname{Var} Y = EY^2 - (EY)^2 = \sigma^2 - \sigma^2\frac{2}{\pi} = \sigma^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$

Για τη μεταβλητή $Z = X^2$, έχουμε: (δείτε και παράδειγμα 12 του κεφαλαίου 5 στο βιβλίο)

$$F_Z(z) = P(Z\le z) = P(X^2\le z) = P(-\sqrt{z}\le X\le\sqrt{z}) =$$

$$= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx$$

Άρα: $f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{2e^{-z/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{e^{-z/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi z}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{1/2} z^{1/2-1}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}z} = \frac{(1/2\sigma^2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} z^{1/2-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}z}, \quad z>0$$

και $f_Z(z) = 0$, $z\le 0$.

Άρα: $f_Z(z) = \Gamma\left(z; \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$

Όπως και παραπάνω: $EZ = \int_{-\infty}^\infty z f_Z(z)\,dz = \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x)\,dx$

Πιο απλά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 2 και 4 του Κεφαλαίου 7. Ως εκ τούτου, αν Z_1 έχει την πυκνότητα $\Gamma(\alpha,\lambda)$, θα ισχύει: $EZ_1=\frac{\alpha}{\lambda}$ και $\mathrm{Var}\,Z_1=\frac{\alpha}{\lambda^2}$. Εδώ έχουμε $f_{Z_1}(z)=\Gamma\left(z;\frac{1}{2},\frac{1}{2\sigma^2}\right)$, δηλαδή $\alpha=1/2$ και $\lambda=1/2\sigma^2$. Άρα:

$$EZ_1=\frac{1/2}{1/2\sigma^2}=\sigma^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}\,Z_1=\frac{1/2}{1/4\sigma^4}=2\sigma^4$$

Για τη μεταβλητή $W=e^{tX}$ έχουμε:

Έστω $w=\varphi(x)=e^{tx}$ με $t\neq 0$. Τότε $\varphi'(x)=te^{tx}$, δηλαδή η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (αν $t>0$) ή γνησίως φθίνουσα (αν $t<0$), και $\varphi^{-1}(w)=\frac{1}{t}\ln w$

Άρα: $f_W(w)=f(\varphi^{-1}(w))\left|\frac{d\varphi^{-1}(w)}{dw}\right|=\frac{e^{-(\ln w)^2/2\sigma^2t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{w\cdot|t|}$, $w>0$

και $f_W(w)=0$, $w\leq 0$

$$EW=\int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w)\,dw=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx \quad (\text{ροπογεννήτρια της } X)$$

Χρησιμοποιώντας τη 2η σχέση (δες και παράδειγμα 1, κεφάλαιο 8), έχουμε:

$$EW=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{tx-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

η οποία, επειδή $tx-\frac{x^2}{2\sigma^2}=-\frac{(x-\sigma^2t)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma^2t^2}{2}$, δίνει:

$$EW = e^{\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-\sigma^2 t)^2/2\sigma^2\right] dy =$$

$$= e^{\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} N(x; \sigma^2 t, \sigma^2)\, dx = e^{\sigma^2 t^2/2}$$

$W^2 = e^{2tX}$, οπότε η EW^2 υπολογίζεται απλά από την έκφραση για την EW αντικαθιστώντας το t με $2t$. Επομένως:

$$EW^2 = e^{4\sigma^2 t^2/2} = e^{2\sigma^2 t^2}$$

$$\mathrm{Var}W = EW^2 - (EW)^2 = e^{2\sigma^2 t^2} - e^{\sigma^2 t^2}$$

β) $f(x) = N(x; \mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

η πυκνότητα της $Y = e^X$ έχει ήδη υπολογιστεί στην Άσκηση 3 (ερώτημα iiα) και είναι ίση με:

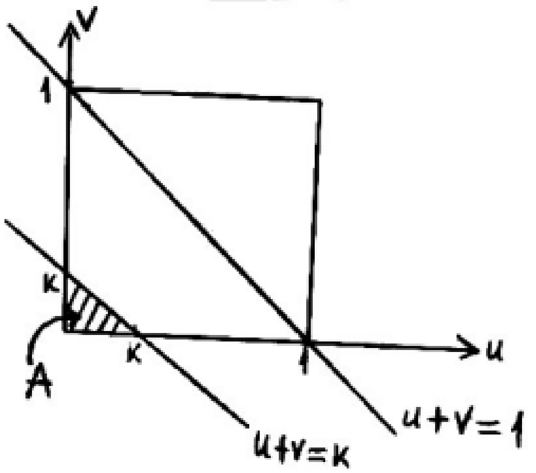
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της $EY = Ee^X$ η διαδικασία είναι ίδια με αυτήν που ακολουθείται στο Παράδειγμα 1 του Κεφαλαίου 8 για τον υπολογισμό της ροπογεννήτριας $M_X(t) = Ee^{tX} = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$ η οποία για $t=1$ δίνει $EY = M_X(1) = e^{\mu} e^{\sigma^2/2}$.

Ομοίως για $t=2$ έχουμε $EY^2 = Ee^{2X} = M_X(2) = e^{2\mu} e^{2\sigma^2}$

Άρα: $\mathrm{Var}Y = EY^2 - (EY)^2 = e^{2\mu} e^{2\sigma^2} - e^{2\mu} e^{\sigma^2} = e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$

ΑΣΚΗΣΗ 7

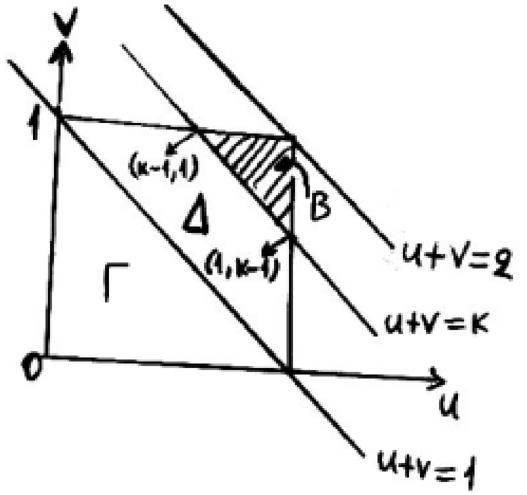


$X = u + v$

Για $\kappa < 0$, προφανώς $P(X \leq \kappa) = 0$

Εάν $0 \leq \kappa \leq 1$ τότε:

$$P(X \leq \kappa) = \frac{\text{εμβαδόν τριγώνου } A}{\text{εμβαδόν τετραγώνου}} = \frac{\kappa^2}{2}$$



Εάν $1 < \kappa \leq 2$ τότε

$$P(X \leq \kappa) = \frac{\text{εμβαδόν } (\Gamma + \Delta)}{\text{εμβαδόν τετραγώνου}} =$$

$$= 1 - \text{εμβαδόν}(B) = 1 - \frac{[1-(\kappa-1)]^2}{2} =$$

$$= 1 - \frac{(2-\kappa)^2}{2}$$

Εάν $\kappa > 2$ τότε προφανώς $P(X \leq \kappa) = 1$

$$\text{Άρα: } F_X(\kappa) = P(X \leq \kappa) = \begin{cases} 0, & \kappa < 0 \\ \frac{\kappa^2}{2}, & 0 \leq \kappa \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-\kappa)^2}{2} & 1 < \kappa \leq 2 \\ 1 & \kappa > 2 \end{cases}$$

Μια συνάρτηση πυκνότητας της X προκύπτει ως:

$$f_X(\kappa) = F'_X(\kappa) = \begin{cases} \kappa, & 0 \leq \kappa \leq 1 \\ 2-\kappa, & 1 < \kappa \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=1$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^2 x^2(2-x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{1}{4}+\frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{6}$$

Άρα: $VarX=EX^2-(EX)^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι μη αρνητική. Επιπλέον:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx=\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\int_0^1 (x+x^3-2x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

Επομένως, μια συνάρτηση πυκνότητας είναι η εξής:

$$f(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 12x^2(1-x)^2\,dx=\int_0^1 12(x^2+x^4-2x^3)\,dx=$$

$$= 12\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 12\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 12x^3(1-x)^2\,dx = \int_0^1 12(x^3+x^5-2x^4)\,dx =$$

$$= 12\cdot\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-2\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 12\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

Άρα: $Var X = EX^2-(EX)^2 = \frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}-\frac{4}{25} = \frac{1}{25}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$P(X\le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, η οποία υπολογίζεται με χρήση του Πίνακα I στο τέλος του βιβλίου, μιας και δεν υπάρχει απλή αναλυτική έκφραση για την $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$. Ωστόσο, επειδή η $\varphi(x)$ είναι συμμετρική ισχύει ότι $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$, $-\infty < x < \infty$, η οποία για $x=0$ δίνει $\Phi(0) = 1/2$

Ως εκ τούτου: $P(X\le 80) = 1/2 \Rightarrow \Phi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{80-\mu}{\sigma} = 0$
$\Rightarrow \mu = 80$

$P(X\le 70) = \frac{1}{4} \Rightarrow \Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{4}$ όπου η τιμή του $z = \frac{70-\mu}{\sigma}$

για την οποία $\Phi(z) = 1/4 = 0.25$, υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών -0.68 και -0.67 για τις οποίες από τον Πίνακα I βρίσκουμε $\Phi(-0.68) = 0.2483$ και $\Phi(-0.67) =$ $= 0.2514$. Δηλ. $z = -0.68 + \dfrac{0.25 - 0.2483}{0.2514 - 0.2483}(0.68 - 0.67) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -0.6745161$

Άρα: $\dfrac{70-\mu}{\sigma} = -0.6745161 \Rightarrow \sigma = \dfrac{10}{0.6745161} \Rightarrow \sigma \simeq 14.83$

$$P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{20}{14.83}\right) \simeq 1 - \Phi(1.3486) = \Phi(-1.3486)$$

η οποία υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών $\Phi(-1.35) = 0.0885$ και $\Phi(-1.34) = 0.0901$ του Πίνακα I.

Άρα: $P(X \geq 100) = \Phi(-1.3486) = \Phi(-1.35) + \dfrac{1.35 - 1.3486}{1.35 - 1.34} \cdot$
$\cdot \left(\Phi(-1.34) - \Phi(-1.35)\right) = 0.0887$

Το ποσοστό των ατόμων που ζυγίζουν τουλάχιστον 100 κιλά, των οποίων το βάρος υπερβαίνει τα 110 κιλά δίνεται ως:

$$P(X \geq 110 \setminus X \geq 100) = \frac{P(X \geq 110 \text{ και } X \geq 100)}{P(X \geq 100)} =$$

$= \dfrac{P(X \geq 110)}{P(X \geq 100)}$, όπου $P(X \geq 110) = 1 - P(X \leq 110) =$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{110-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(2.023) = \Phi(-2.023)$$

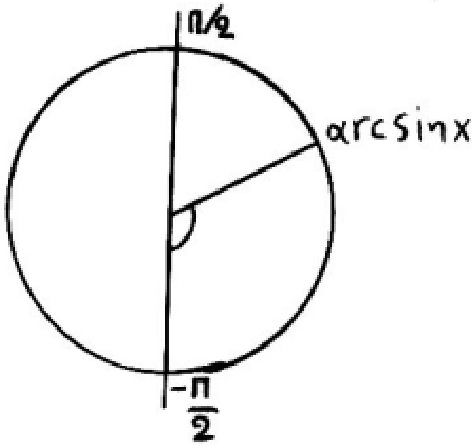
η οποία υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών $\Phi(-2.03) = 0.0212$ και $\Phi(-2.02) = 0.0217$ του Πίνακα Ι.

Άρα: $P(X \geq 110) = \Phi(-2.023) = \Phi(-2.03) + \dfrac{2.03-2.023}{2.03-2.02} \cdot$

$\cdot \left[\Phi(-2.02) - \Phi(-2.03)\right] = 0.02155$

Επομένως: $P(X \geq 110 \mid X \geq 100) = \dfrac{0.02155}{0.0887} \simeq 0.243$

ΑΣΚΗΣΗ 10



Έστω Θ = γωνία (σε ακτίνια) που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η Θ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή. Άρα:

$$F_\Theta(\vartheta) = \begin{cases} 0 , & \vartheta < -\pi/2 \\ \dfrac{\vartheta - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} , & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 , & \vartheta > \pi/2 \end{cases}$$

δηλ. $$F_\Theta(\vartheta) = \begin{cases} 0 , & \vartheta < -\pi/2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\vartheta}{\pi} , & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 , & \vartheta > \pi/2 \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση κατανομής της $X = \sin\Theta$ έχουμε:

$F(x) = P(X \leq x) = P(\sin\Theta \leq x) = P(\Theta \leq \arcsin x) =$

$= F_\Theta(\arcsin x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x$, για $-1 \leq x \leq 1$

Προφανώς $P(X \le x) = 0$, για $x < -1$ και $P(X \le x) = 1$, για $x > 1$

Άρα: $F(x) = \begin{cases} 0 , & x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x , & -1 \le x \le 1 \\ 1 , & x > 1 \end{cases}$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας της X έχουμε:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} , & -1 < x < 1 \\ 0 , & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της X μπορεί να υπολογιστεί είτε από τον ορισμό:

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\, dx$, ή πιο απλά από τη

σχέση: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\vartheta \cdot f_\Theta(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{\sin\vartheta}{\pi}\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = 0$

όπου $f_\Theta(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} , & -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \\ 0 , & \text{αλλιώς} \end{cases}$ είναι η πυκνότητας της Θ

Αντίστοιχα: $EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\sin\vartheta)^2 \cdot f_\Theta(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\vartheta)^2}{\pi}\, d\vartheta =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\vartheta}{2\pi}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\vartheta}{2}\, d(2\vartheta) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi}\Big[-\sin 2\vartheta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$

Άρα: $\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ 11}}$

Η e^{tX} έχει πεπερασμένη μέση τιμή αν και μόνο αν

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{tx}| f(x)\, dx < \infty \qquad \text{όπου}$$

$$f(x) = \Gamma(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} &, \quad x > 0 \\ 0 &, \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Έχουμε: $I = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}\, dx$

Για $\underline{t \geq \lambda}$ ισχύει: $x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} \geq x^{\alpha-1} > 0$, για $x > 0$

Άρα: $I \geq \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_0^\infty = \infty$

οπότε η e^{tX} δεν έχει πεπερασμένη μέση τιμή για $t \geq \lambda$

Για $\underline{t < \lambda}$, έχουμε: $I = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(\lambda-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}\, dx =$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty \Gamma(x; \alpha, \lambda-t)\, dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha < \infty$$

όπου επειδή $|e^{tx}| = e^{tx}$ ισχύει και $Ee^{tX} = I$ δηλ.

$Ee^{tX} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$