ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΜ 161)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 7ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = άθροισμα 7

Σε κάθε δοκιμή (ρίψη των 2 ζαριών) το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι

$\underline{\Omega} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$

Τα αποτελέσματα αυτά έχουν την ίδια πιθανότητα, η οποία ως εκ τούτου θα είναι ίση με $1/|\underline{\Omega}|$ δηλ. $1/36$

$E = \{\text{άθροισμα 2 ζαριών ίσον } 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

οπότε η πιθανότητα "επιτυχίας" σε μια δοκιμή είναι ίση με

$$p = P(E) = \frac{|E|}{|\underline{\Omega}|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Αν X = πλήθος ρίψεων έως να έρθει για 1η φορά άθροισμα 7, τότε το ενδεχόμενο $\{X=k\}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία ρίψεων της μορφής: $\underbrace{\underline{\text{όχι }7}\ \underline{\text{όχι }7}\ldots\underline{\text{όχι }7}}_{\substack{(k-1)\text{ φορές}\\ \text{όχι } 7}}\ \underline{7}$, του οποίου

η πιθανότητα είναι: $P(X=k) = f_X(k) = (1-p)^{k-1}\cdot p = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$

δηλ. γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/6$. (Αναμενόμενο, αφού X = πλήθος δοκιμών Bernoulli μέχρι την 1η επιτυχία).

β) Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = "εξάρες", οπότε

[πιθανότητα "επιτυχίας" σε μια δοκιμή] $= p = P\{(6,6)\} = \frac{1}{36}$

τότε Y = πλήθος "επιτυχιών" σε 100 δοκιμές

και $\{Y=k\} = \{k$ ακριβώς "επιτυχίες" σε 100 δοκιμές$\}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(Y=k) = f_Y(k) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} = \binom{100}{k}\left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{100-k}$$

για $k = 0, 1, 2, \ldots, 100$

η οποία είναι διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=100$ και $p = 1/36$

γ) Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με "επιτυχία" = "άσο-δύο", οπότε
[πιθανότητα "επιτυχίας" σε μια δοκιμή] $= p = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Z = πλήθος "αποτυχιών" μέχρι την $100_η$ "επιτυχία",
οπότε το ενδεχόμενο $\{Z=k\}$ αντιστοιχεί στο {99 "επιτυχίες" στις $(99+k)$ δοκιμές και "επιτυχία" στην $(100+k)$-στή δοκιμή}

Άρα: $$P(Z=k) = f_Z(k) = \left[\binom{99+k}{99} p^{99}(1-p)^k\right]\cdot p =$$

$$= \binom{100+k-1}{99} p^{100}(1-p)^k = \binom{100+k-1}{k} p^{100}(1-p)^k =$$

$$= \binom{100+k-1}{k}\left(\frac{1}{18}\right)^{100}\left(\frac{17}{18}\right)^k$$

η οποία είναι αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\alpha = 100$ και $p = 1/18$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) $$P(X \geq Y) = \sum_{k=0}^{N} P(X \geq Y, Y=k) = \sum_{k=0}^{N} P(X \geq k, Y=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} P(X \geq k)\cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{m=k}^{N} P(X=m)\right)\cdot P(Y=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{m=k}^{N}\frac{1}{N+1}\right)\cdot\frac{1}{N+1} = \sum_{k=0}^{N}\frac{N-k+1}{N+1}\cdot\frac{1}{N+1} = \sum_{k=0}^{N}\frac{(N+1)-k}{(N+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{N+1} - \sum_{k=0}^{N}\frac{k}{(N+1)^2} = \frac{N+1}{N+1} - \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=0}^{N} k = 1 - \frac{1}{(N+1)^{\cancel{2}}}\,\frac{N\cancel{(N+1)}}{2} = \frac{N+2}{2(N+1)}$$

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{N}P(X=k,Y=X)=\sum_{k=0}^{N}P(X=k,\ Y=k)=\sum_{k=0}^{N}P(X=k)\cdot P(Y=k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{N+1}\frac{1}{N+1}=\frac{N+1}{(N+1)^2}=\frac{1}{N+1}$$

β) $Z_1=\min(X,Y)$ παίρνει τις τιμές $k=0,1,2,\dots,N$

$$P(Z_1\geq k)=P(X\geq k,\ Y\geq k)=P(X\geq k)\cdot P(Y\geq k)=\left(\sum_{m=k}^{N}\frac{1}{N+1}\right)^2=\left(\frac{N-k+1}{N+1}\right)^2$$

και $P(Z_1=k)=P(Z_1\geq k)-P(Z_1\geq k+1)=\left(\frac{N-k+1}{N+1}\right)^2-\left(\frac{N-k}{N+1}\right)^2=\frac{1+2(N-k)}{(N+1)^2}$

<u>2ος Τρόπος</u>: $P(Z_1=k)=P(X=k,Y>k)+P(X>k,\ Y=k)+P(X=k,Y=k)=$

$$=P(X=k)\cdot P(Y>k)+P(X>k)\cdot P(Y=k)+P(X=k)\,P(Y=k)=$$

$$=P(X=k)\cdot P(Y\geq k+1)+P(X\geq k+1)\cdot P(Y=k)+P(X=k)\,P(Y=k)=$$

$$=\frac{1}{N+1}\,\frac{N-k}{N+1}+\frac{N-k}{N+1}\,\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\,\frac{1}{N+1}=\frac{1+2(N-k)}{(N+1)^2}$$

$Z_2=\max(X,Y)$ παίρνει επίσης τις τιμές $k=0,1,2,\dots,N$

$$P(Z_2\leq k)=P(X\leq k,\ Y\leq k)=P(X\leq k)\cdot P(Y\leq k)=\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{N+1}\right)^2=\left(\frac{k+1}{N+1}\right)^2$$

και $P(Z_2=k)=P(Z_2\leq k)-P(Z_2\leq k-1)=\left(\frac{k+1}{N+1}\right)^2-\left(\frac{k}{N+1}\right)^2=\frac{2k+1}{(N+1)^2}$

Σημείωση: $P(Z_2\leq k-1)=0$ όταν $k=0$, η οποία συμπτωματικά ικανοποιείται από την παραπάνω σχέση $P(Z_2\leq -1)=\left(\frac{-1+1}{N+1}\right)^2=0$. Όμοιως για την $P(Z_1\geq k+1)$ με $k=N$ που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω.

<u>2ος Τρόπος</u>: $P(Z_2=k)=P(X=k,Y<k)+P(X<k,\ Y=k)+$

$$+P(X=k,Y=k)=P(X=k)\cdot P(Y\leq k-1)+P(X\leq k-1)\,P(Y=k)+P(X=k)\,P(Y=k)=$$

$$=\frac{1}{N+1}\,\frac{k}{N+1}+\frac{k}{N+1}\,\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\,\frac{1}{N+1}=\frac{2k+1}{(N+1)^2}$$

$Z_3=|Y-X|$ παίρνει επίσης τις τιμές $k=0,1,2,\dots,N$

$$P(Z_3=k)=P(\{X-Y=k\}\cup\{X-Y=-k\})$$

η οποία για $k\neq 0$, που τα $\{X-Y=k\}$ και $\{X-Y=-k\}$ είναι ξένα ενδεχόμενα, δίνει:

$$P(Z_3=k)=P(X-Y=k)+P(Y-X=k)=2P(X-Y=k)=$$
$$=2\sum_{m=0}^{N}P(Y=m,X-Y=k)=2\sum_{m=0}^{N}P(Y=m,X=k+m)=$$
$$=2\sum_{m=0}^{N-k}P(Y=m)\cdot P(X=k+m)=2\sum_{m=0}^{N-k}\frac{1}{N+1}\frac{1}{N+1}=\frac{2(N-k+1)}{(N+1)^2}\text{, για } k=1,2\ldots,N$$

ενώ για $k=0$, έχουμε: $P(Z_3=0)=P(X=Y)=\frac{1}{N+1}$

$Z_4=X+Y$ παίρνει τις τιμές $k=0,1,2,\ldots,2N$

$$P(X+Y=k)=P(Z_4=k)=\sum_{m=0}^{N}P(X=m,X+Y=k)=\sum_{m=0}^{N}P(X=m,Y=k-m)=$$
$$=\sum_{m=\max(k-N,0)}^{\min(k,N)}P(X=m)\cdot P(Y=k-m)=\sum_{m=\max(k-N,0)}^{\min(k,N)}\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{N+1}=\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{m=\max(k-N,0)}^{\min(k,N)}1=$$
$$=\frac{\min(k,N)-\max(k-N,0)+1}{(N+1)^2}=\begin{cases}\frac{k+1}{(N+1)^2}, & \text{για } k=0,1,\ldots,N\\[2ex] \frac{2N+1-k}{(N+1)^2}, & \text{για } k=N+1,N+2,\ldots,2N\end{cases}$$

γ) Αν X,Y ακολουθούν κατανομές Bernoulli με παραμέτρους p_1,p_2 αντίστοιχα, τότε:

$$P(X=k)=\begin{cases}p_1, & \text{για } k=1\\ (1-p_1), & \text{για } k=0\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases},\quad P(Y=k)=\begin{cases}p_2, & \text{για } k=1\\ (1-p_2), & \text{για } k=0\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

όπου $p_1,p_2\in(0,1)$

$$P(X\geq Y)=\sum_{k=0}^{1}P(X\geq Y,Y=k)=\sum_{k=0}^{1}P(X\geq k)\cdot P(Y=k)=\sum_{k=0}^{1}\left(\sum_{m=k}^{1}P(X=m)\right)P(Y=k)=$$
$$=\sum_{m=0}^{1}P(X=m)\,P(Y=0)+P(X=1)\cdot P(Y=1)=P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)=$$
$$=1-p_2+p_1p_2$$

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{1}P(X=k,Y=X)=\sum_{k=0}^{1}P(X=k)\cdot P(Y=k)=P(X=0)P(Y=0)+$$
$$+P(X=1)P(Y=1)=(1-p_1)(1-p_2)+p_1\cdot p_2=1-p_1-p_2+2p_1p_2$$

$Z_1 = \min(X,Y)$ παίρνει τις τιμές $k=0,1$

$$P(Z_1=k) = P(X=k)\,P(Y\geq k+1) + P(X\geq k+1)\,P(Y=k) + P(X=k)P(Y=k) =$$

$$= \begin{cases} (1-p_1)\cdot p_2 + p_1\cdot(1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2) & , \text{ για } k=0 \\ p_1\cdot 0 + 0\cdot p_2 + p_1\cdot p_2 & , \text{ για } k=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-p_1p_2 & , \text{ για } k=0 \\ p_1\cdot p_2 & , \text{ για } k=1 \end{cases}$$

$Z_2 = \max(X,Y)$ παίρνει τις τιμές $k=0,1$

$$P(Z_2=k) = P(X=k)\cdot P(Y\leq k-1) + P(X\leq k-1)\cdot P(Y=k) + P(X=k)\cdot P(Y=k) =$$

$$= \begin{cases} (1-p_1)\cdot 0 + 0\cdot(1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2) = 1-p_1-p_2+p_1\cdot p_2 , & \text{ για } k=0 \\ p_1\cdot(1-p_2) + (1-p_1)p_2 + p_1\cdot p_2 = p_1+p_2-p_1\cdot p_2 , & \text{ για } k=1 \end{cases}$$

$Z_3 = |Y-X|$ παίρνει τις τιμές $k=0,1$

$$P(Z_3=k) = \left.\begin{cases} P(X-Y=k) + P(Y-X=k) , & \text{ για } k=1 \\ P(X=Y) , & \text{ για } k=0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \left.\begin{cases} \sum_{m=0}^{1}\left[P(Y=m)\cdot P(X=k+m) + P(X=m)\cdot P(Y=k+m)\right] , & \text{ για } k=1 \\ 1-p_1-p_2+2p_1p_2 , & \text{ για } k=0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \left.\begin{cases} P(Y=0)\cdot P(X=1) + P(X=0)\cdot P(Y=1) , & \text{ για } k=1 \\ 1-p_1-p_2+2p_1p_2 , & \text{ για } k=0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \begin{cases} p_1+p_2-2p_1p_2 , & \text{ για } k=1 \\ 1-p_1-p_2+2p_1p_2 , & \text{ για } k=0 \end{cases}$$

$Z_4 = X+Y$ παίρνει τις τιμές $k=0,1,2$

$$P(Z_4=k) = \sum_{m=0}^{1} P(X=m, X+Y=k) = \sum_{m=\max(k-1,0)}^{\min(k,1)} P(X=m)\,P(Y=k-m) =$$

$$= \begin{cases} P(X=0)\,P(Y=0) = (1-p_1)(1-p_2) = 1-p_1-p_2+p_1p_2, & \text{για } k=0 \\ P(X=0)\,P(Y=1) + P(X=1)\,P(Y=0) = p_1+p_2-2p_1p_2, & \text{για } k=1 \\ P(X=1)\,P(Y=1) = p_1 \cdot p_2, & \text{για } k=2 \end{cases}$$

Αν X, Y ακολουθούν γεωμετρικές κατανομές με παραμέτρους p_1, p_2 αντίστοιχα, τότε:

$$P(X=k) = (1-p_1)^k p_1, \quad \text{για } k=0,1,2,\dots$$

$$P(Y=k) = (1-p_2)^k p_2, \quad \text{για } k=0,1,2,\dots$$

Επίσης: $P(X \geq k) = (1-p_1)^k$ και $P(Y \geq k) = (1-p_2)^k$ όπου k ακέραιος ≥ 0

Και: $P(X \leq t) = 1-(1-p_1)^{[t]+1}$, $P(Y \leq t) = 1-(1-p_2)^{[t]+1}$, όπου $t \geq 0$

Επομένως, έχουμε:

$$P(X \geq Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \geq Y,\, Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \geq k)\cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_1)^k p_2 (1-p_2)^k =$$

$$= p_2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_1-p_2+p_1 \cdot p_2)^k = p_2 \frac{1}{1-(1-p_1-p_2+p_1\cdot p_2)} = \frac{p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k,\, Y=X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_1(1-p_1)^k p_2(1-p_2)^k =$$

$$= p_1p_2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_1-p_2+p_1\cdot p_2)^k = \frac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1\cdot p_2}$$

$Z_1 = \min(X,Y)$ παίρνει τις τιμές $k=0,1,2,\dots$

$$P(Z_1=k) = P(X=k)\,P(Y \geq k+1) + P(X \geq k+1)\,P(Y=k) + P(X=k)\,P(Y=k) =$$

$$= p_1(1-p_1)^k (1-p_2)^{k+1} + (1-p_1)^{k+1} p_2 (1-p_2)^k + p_1(1-p_1)^k p_2 (1-p_2)^k =$$

$$= (1-p_1)^k (1-p_2)^k \left[p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) + p_1p_2\right] =$$

$$= \left[1-(p_1+p_2-p_1p_2)\right]^k (p_1+p_2-p_1p_2)$$

δηλ. γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = p_1+p_2-p_1p_2$

$Z_2 = \max(X,Y)$ παίρνει τις τιμές $k=0,1,2,\dots$

$$P(Z_2=k) = P(X=k)\,P(Y \leq k-1) + P(X \leq k-1)\,P(Y=k) + P(X=k)\,P(Y=k) =$$

$$= p_1(1-p_1)^k\left[1-(1-p_2)^k\right] + p_2(1-p_2)^k\left[1-(1-p_1)^k\right] + p_1(1-p_1)^k p_2(1-p_2)^k$$

$$= p_1(1-p_1)^k + p_2(1-p_2)^k - p_1(1-p_1)^k(1-p_2)^k - p_2(1-p_2)^k(1-p_1)^k + p_1p_2(1-p_1)^k(1-p_2)^k =$$

$$= (p_1p_2 - p_1 - p_2)\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^k + p_1(1-p_1)^k + p_2(1-p_2)^k$$

$Z_3 = |Y - X|$ παίρνει τις τιμές $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(Z_3 = k) = \begin{cases} P(X=Y), & \text{για } k=0 \\ P(X-Y=k) + P(Y-X=k) & \text{για } k=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Έχουμε ήδη βρεί ότι $P(X=Y) = \dfrac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$

Επιπλέον $P(X-Y=k) = \sum_{m=0}^{\infty} P(Y=m, X=k+m) = \sum_{m=0}^{\infty} P(Y=m)\cdot P(X=k+m) =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_2(1-p_2)^m\, p_1(1-p_1)^{k+m} = p_1p_2(1-p_1)^k \sum_{m=0}^{\infty}(1-p_1-p_2+p_1p_2)^m = \frac{p_1p_2(1-p_1)^k}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

Ομοίως: $P(Y-X=k) = \dfrac{p_1p_2(1-p_2)^k}{p_1+p_2-p_1p_2}$

Άρα: $$P(Z_3=k) = \begin{cases} \dfrac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}, & \text{για } k=0 \\[2mm] \dfrac{p_1p_2\left[(1-p_1)^k + (1-p_2)^k\right]}{p_1+p_2-p_1p_2}, & \text{για } k=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$Z_4 = X + Y$ παίρνει τις τιμές $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X=m, X+Y=k) = \sum_{m=0}^{k} P(X=m)\cdot P(Y=k-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k}(1-p_1)^m p_1p_2(1-p_2)^{k-m} = p_1p_2(1-p_2)^k \sum_{m=0}^{k}\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^m =$$

$$= p_1p_2(1-p_2)^k \left[\frac{1-\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{k+1}}{1-\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)}\right] = \frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\left[(1-p_2)^{k+1} - (1-p_1)^{k+1}\right],\quad p_1 \neq p_2$$

για $p_1 = p_2 = p$ έχουμε: $P(X+Y=k) = p^2(1-p)^k \sum_{m=0}^{k} 1 = (k+1)\,p^2(1-p)^k$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) $P(X=k) = \dfrac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}$ και $P(Y=k) = \dfrac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}$ για $k=0,1,2,\dots$

$$P(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X=m, X+Y=k) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X=m, Y=k-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} P(X=m)\cdot P(Y=k-m) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \frac{\lambda_2^{k-m} e^{-\lambda_2}}{(k-m)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!(k-m)!} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k$$

δηλαδή κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

β) $$P\left(\frac{X}{Y}=k\right) \underset{Y\neq 0}{=} \sum_{m=1}^{\infty} P(Y=m, X=kY) = \sum_{m=1}^{\infty} P(Y=m)\, P(X=km) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{m} \frac{\lambda_2^m e^{-\lambda_2}}{m!} \frac{\lambda_1^{km} e^{-\lambda_1}}{(km)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{m} \frac{\lambda_1^{km} \lambda_2^m}{(km)!\, m!}, & \text{για ρητό } k>0 \\ \text{άθροιση στο } m \in \{\tfrac{1}{k}, \tfrac{2}{k}, \dots\} \cap \mathbb{Z}^+ \qquad \text{άθροιση στο } m \in \{\tfrac{1}{k}, \tfrac{2}{k}, \dots\} \cap \mathbb{Z}^+ & \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^m e^{-\lambda_2}}{m!} \frac{\lambda_1^0 e^{-\lambda_1}}{0!} = e^{-\lambda_1}\left(1 - \frac{\lambda_2^0 e^{-\lambda_2}}{0!}\right) = e^{-\lambda_1}\left(1-e^{-\lambda_2}\right), & \text{για } k=0 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) X = μικρότερη τιμή

Y = μεγαλύτερη τιμή

Ζητάμε την $P(X=k, Y=m)$, με $k=1,2,\dots,6$ και $m=1,2,\dots,6$

Δυνατές τιμές $(k,m) \in \{(k,m) : k \le m\} = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,2),\dots,(6,6)\}$

$P(X=1, Y=1) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$

$P(X=2, Y=2) = P(\{(2,2)\}) = 1/36$

ή γενικά για $k=m$, έχουμε:

$$P(X=k, Y=k) = P(\{(k,k)\}) = 1/36$$

ενώ για $k<m$ έχουμε: $P(X=k, Y=m) = P(\{(k,m),(m,k)\}) = \dfrac{2}{36}$

ένδειξη 1ου ζαριού ένδειξη 2ου ζαριού

Άρα: $f(k,m) = P(X=k, Y=m) = \begin{cases} 1/36, & \text{για } k=m, \quad m=1,2,3,\dots 6 \\ 2/36, & \text{για } k<m, \quad k,m=1,2,\dots,6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

β) X = τιμή 1ου ζαριού

Y = μεγαλύτερη από τις 2 τιμές

Ζητάμε την $f(k,m) = P(X=k, Y=m)$ με $k=1,2,\dots,6$ και $m=1,2,\dots,6$

Δυνατές τιμές $(k,m) \in \{(k,m) : k \leq m\}$

$$P(X=1, Y=1) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$$

ένδειξη 1ου ζαριού ένδειξη 2ου ζαριού

Ομοίως:
$$P(X=2, Y=2) = P(\{(2,1),(2,2)\}) = 2/36$$
$$P(X=3, Y=3) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3)\}) = 3/36$$
$$\vdots$$
$$P(X=6, Y=6) = P(\{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}) = 6/36$$

Δηλαδή, για $k=m$, έχουμε $P(X=k, Y=k) = k/36$

Για $k<m$, έχουμε $P(X=k, Y=m) = P(\{(k,m)\}) = 1/36$

ένδειξη 1ου ζαριού ένδειξη 2ου ζαριού

π.χ. $P(X=3, Y=4) = P(\{(3,4)\}) = \dfrac{1}{36}$

Άρα: $f(k,m) = P(X=k, Y=m) = \begin{cases} k/36, & \text{για } m=k, \quad k=1,2,\dots,6 \\ 1/36, & \text{για } m>k, \quad k,m=1,2,\dots,6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y:

α) $f_X(k) = P(X=k) = \sum_{m=1}^{6} P(X=k, Y=m) = \sum_{m=k}^{6} f(k,m) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}(6-k) =$

$= \frac{13-2k}{36}$, για $k=1,2,\dots,6$

$f_Y(m) = P(Y=m) = \sum_{k=1}^{6} P(X=k, Y=m) = \sum_{k=1}^{m} f(k,m) = \frac{2}{36}(m-1) + \frac{1}{36} =$

$= \frac{2m-1}{36}$, για $m=1,2,\dots,6$

β) $f_X(k) = P(X=k) = \sum_{m=1}^{6} P(X=k, Y=m) = \sum_{m=k}^{6} f(k,m) = \frac{k}{36} + \frac{1}{36}(6-k) =$

$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, για $k=1,2,\dots,6$

$f_Y(m) = P(Y=m) = \sum_{k=1}^{6} P(X=k, Y=m) = \sum_{k=1}^{m} f(k,m) = \frac{1}{36}(m-1) + \frac{m}{36} =$

$= \frac{2m-1}{36}$, για $m=1,2,\dots,6$

ΑΣΚΗΣΗ 5

5Μ
8Κ

α) Ζητάμε την πυκνότητα $f_{X_1,X_2}(k,m) = P(X_1=k, X_2=m)$

Δυνατές τιμές του $(k,m) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

Έχουμε ότι $P(X_1=k, X_2=m) = P(X_1=k)\cdot P(X_2=m \mid X_1=k)$

Άρα: $f_{X_1,X_2}(0,0) = P(X_1=0)\cdot P(X_2=0 \mid X_1=0) = \frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12} = \frac{14}{39}$

$f_{X_1,X_2}(0,1) = P(X_1=0)\cdot P(X_2=1 \mid X_1=0) = \frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12} = \frac{10}{39}$

$f_{X_1,X_2}(1,0) = P(X_1=1)\cdot P(X_2=0 \mid X_1=1) = \frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12} = \frac{10}{39}$

$$f_{X_1,X_2}(1,1) = P(X_1=1)\cdot P(X_2=1 \setminus X_1=1) = \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{39}$$

β) Ζητάμε την $f(k,m,n) = P(X_1=k, X_2=m, X_3=n) =$

$$= P(X_1=k)\cdot P(X_2=m \setminus X_1=k)\cdot P(X_3=n \setminus (X_1=k,\ X_2=m))$$

Δυνατές τιμές του $(k,m,n) \in \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$

$$f(0,0,0) = \frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{28}{143}, \quad f(1,0,0) = \frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11} = \frac{70}{429}$$

$$f(0,1,0) = \frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11} = \frac{70}{429}, \quad f(0,0,1) = \frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11} = \frac{70}{429}$$

$$f(1,1,0) = \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11} = \frac{40}{429}, \quad f(1,0,1) = \frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{40}{429}$$

$$f(0,1,1) = \frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{40}{429}, \quad f(1,1,1) = \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11} = \frac{5}{143}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η από κοινού πυκνότητα f των X_1, X_2, X_3 είναι πολυωνυμική με παραμέτρους n και p_1, p_2, p_3. Δηλαδή:

$$f(k_1,k_2,k_3) = P(X_1=k_1, X_2=k_2, X_3=k_3) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{k_3}$$

όπου $p_1+p_2+p_3=1$ και $k_1+k_2+k_3=n$, με k_i μη-αρνητικούς ακεραίους.

Οι περιθώριες πυκνότητες f_{X_i} των X_1, X_2, X_3 είναι διωνυμικές με παραμέτρους n και p_i (αφού μπορεί να θεωρηθεί "επιτυχία" = εμφάνιση του i-στου αποτελέσματος, και "αποτυχία" = μη-εμφάνιση του i-στου αποτελέσματος).

Άρα: $f_{X_i}(k_i) = P(X_i=k_i) = \binom{n}{k_i} p_i^{k_i}(1-p_i)^{n-k_i}$

α) $f_{X_1+X_2}(k) = P(X_1+X_2=k) = P(X_1+X_2=k,\ X_3=n-k) =$

$$= \sum_{m=0}^{k} P(X_1=m,\ X_1+X_2=k,\ X_3=n-k) = \sum_{m=0}^{k} P(X_1=m, X_2=k-m, X_3=n-k) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{n!}{m!\,(k-m)!\,(n-k)!} p_1^m p_2^{k-m} p_3^{n-k} = \frac{p_3^{n-k}\, n!}{(n-k)!\ k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} p_1^m p_2^{k-m} =$$

$$= \binom{n}{k} p_3^{n-k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} p_1^m p_2^{k-m} = \binom{n}{k} p_3^{n-k} (p_1+p_2)^k = \binom{n}{k} (p_1+p_2)^k \left[1-(p_1+p_2)\right]^{n-k}$$

όπου $k=0,1,\dots,n$

δηλ. διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p=p_1+p_2$

2ος Τρόπος:

$$f_{X_1+X_2}(k) = P(X_1+X_2=k) = P(X_3=n-k) = \binom{n}{n-k} p_3^{n-k} (1-p_3)^{n-(n-k)} =$$

$$= \binom{n}{k} \left[1-(p_1+p_2)\right]^{n-k} (p_1+p_2)^k$$

β) $$P(X_2=y \mid X_1+X_2=z) = \frac{P(X_2=y,\ X_1+X_2=z)}{P(X_1+X_2=z)} =$$

$$= \frac{P(X_1=z-y,\ X_2=y,\ X_3=n-z)}{P(X_1+X_2=z)} = \frac{\frac{\cancel{n!}}{(z-y)!\ y!\ \cancel{(n-z)!}} p_1^{z-y} p_2^{y} \cancel{p_3^{n-z}}}{\frac{\cancel{n!}}{z!\ \cancel{(n-z)!}} (p_1+p_2)^z \cancel{p_3^{n-z}}} =$$

$$= \binom{z}{y} \frac{p_1^{z-y} p_2^{y}}{(p_1+p_2)^z} = \binom{z}{y} \left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\right)^{z-y} \left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)^{y} = \binom{z}{y} \left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)^{y} \left(1-\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)^{z-y}$$

δηλ. διωνυμική κατανομή με παραμέτρους z και $p=\frac{p_2}{p_1+p_2}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ακολουθία $n=50$ δοκιμών Bernoulli με P("επιτυχίας") = P(επιβάτης με πλαστή άδεια οδήγησης) $= p = 0.05$

$B_k = \{k$ ακριβώς "επιτυχίες"$\}$

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\text{προσέγγιση Poisson}}{\simeq} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$, όπου $\lambda = n\cdot p = \frac{5}{2}$

Ζητάμε την $P(B_0 \cup B_1 \cup B_2) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ξένα}}}{=} \sum_{k=0}^{2} P(B_k) \simeq \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right) =$

$= e^{-5/2}\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{25}{8}\right) = \frac{53}{8} e^{-5/2} \simeq 0.54381$

<u>Σημείωση</u>: Η ακριβής τιμή όπως προκύπτει από τη διωνυμική κατανομή είναι ίση με $\sum_{k=0}^{2} P(B_k) = \sum_{k=0}^{2} \binom{50}{k} (0.05)^k (0.95)^{50-k} = \frac{317}{50}\left(\frac{19}{20}\right)^{48} \simeq$

$\simeq 0.54053$. Επομένως, η προσέγγιση Poisson δίνει τιμή η οποία διαφέρει από την ακριβή κατά

$$\frac{\frac{53}{8} e^{-5/2} - \frac{317}{50}\left(\frac{19}{20}\right)^{48}}{\frac{317}{50}\left(\frac{19}{20}\right)^{48}} \cdot 100\% \simeq 0.60681\%$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

$$P(X=x, Y=y, Z=z \setminus X+Y+Z=x+y+z) = \frac{P(X=x, Y=y, Z=z, X+Y+Z=x+y+z)}{P(X+Y+Z=x+y+z)} =$$

$$= \frac{P(X=x, Y=y, Z=z)}{P(X+Y+Z=x+y+z)}, \text{ για } x,y,z = 0,1,2,\dots \qquad (1)$$

όπου, επειδή X, Y, Z ανεξάρτητες τ.μ., έχουμε:

$$P(X=x, Y=y, Z=z) = P(X=x) \cdot P(Y=y) \cdot P(Z=z) = \frac{\lambda_1^x e^{-\lambda_1}}{x!} \frac{\lambda_2^y e^{-\lambda_2}}{y!} \frac{\lambda_3^z e^{-\lambda_3}}{z!} =$$

$$= \frac{\lambda_1^x \lambda_2^y \lambda_3^z e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}}{x!\, y!\, z!} \qquad (2)$$

Για τον υπολογισμό της $P(X+Y+Z=x+y+z)$ μπορούμε είτε να εφαρμόσουμε παρόμοια διαδικασία με εκείνη της Άσκησης 3 (Ερώτημα (α)), είτε αλλά να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1(iii) της σελίδας 87 του βιβλίου, δηλαδή: Αν $X_1, X_2, \dots, X_r$ ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομές Poisson με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ αντίστοιχα, τότε η $X_1+X_2+\dots+X_r$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_r$. Ως εκ τούτου, έχουμε:

$$P(X+Y+Z=\underset{\substack{\downarrow\\ k=0,1,2,\dots}}{k}) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}}{k!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X+Y+Z=x+y+z) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^{x+y+z}\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}}{(x+y+z)!} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2),(3) στην (1), προκύπτει ότι

$$P(X=x, Y=y, Z=z \mid X+Y+Z=x+y+z) = \frac{\lambda_1^x \lambda_2^y \lambda_3^z}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^{x+y+z}} \frac{(x+y+z)!}{x!\,y!\,z!} =$$

$$= \frac{(x+y+z)!}{x!\,y!\,z!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^y \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^z$$

η οποία είναι πολυωνυμική πυκνότητα με παραμέτρους $n=x+y+z$ και $p_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$, $p_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$, $p_3=\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Εξ' ορισμού $\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\, t^k \quad (1)$

Όμως το ανάπτυγμα MacLaurin της $\Phi_X(t)$ γράφεται ως

$$\Phi_X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Phi_X^{(m)}(0)}{m!} t^m,$$ όπου $\Phi_X^{(m)}(t)$ η m-στή παράγωγος της $\Phi_X(t)$

Για την $\Phi_X(t)=e^{\lambda(t^2-1)}$ έχουμε: $e^{\lambda(t^2-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} t^{2m} =$

$$= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ άρτιος}}}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2} e^{-\lambda}}{(k/2)!} t^k \quad (2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των πολυωνύμων στις (1) και (2), προκύπτει ότι

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^{k/2} e^{-\lambda}}{(k/2)!}, & \text{για } k=0,2,4,6,\dots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δηλ. k είναι μη-αρνητικός άρτιος ακέραιος)

Για να είναι η $f_X(k)$ συνάρτηση πυκνότητας θα πρέπει να ικανοποιεί τις αναγκαίες ιδιότητες του ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας δ.τ.μ. Συγκεκριμένα, έχουμε:

i) $f_X(k) \geq 0$ για $k \in R$, η οποία προφανώς ισχύει μιας και $\lambda > 0$

ii) Το σύνολο $\{k : f_X(k) \neq 0\}$ είναι ένα αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο του R ή ένα πεπερασμένο υποσύνολο του R. Προφανώς ισχύει το πρώτο αφού $f_X(k) \neq 0$ στο σύνολο $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

iii) $\sum_i f(k_i) = 1 \Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ \hookrightarrow \text{άρτιος}}}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2} e^{-\lambda}}{(k/2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$